

ANÁLISE DE GRANDES DEFORMAÇÕES E PLASTICIDADE
POR MEIO DE ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

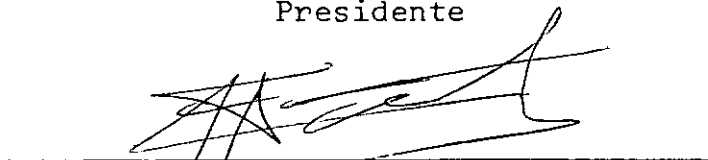
Luiz Landau

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:



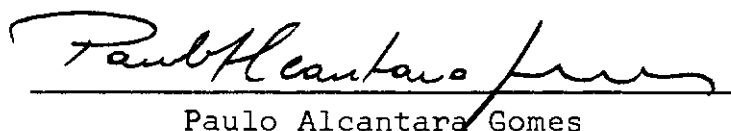
Nelson Francisco Favilla Ebecken
Presidente



Agustín J. Ferrante



Fernando Venancio Filho



Paulo Alcantara Gomes

RIO DE JANEIRO
ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL
SETEMBRO DE 1976

i

A meus pais e irmãos.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor FERNANDO LUIZ LÔBO B. CARNEIRO como co
ordenador do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ.

Ao Professor NELSON FRANCISCO FAVILLA EBECKEN pela
orientação e amizade.

Aos colegas, professores e funcionários da COPPE.

Ao CNPq e ao CEPEL pelo apoio financeiro concedido.

SUMÁRIO

Através do método dos elementos finitos, analisa-se o comportamento não-linear de problemas de grandes deformações e plasticidade. Tanto para a formulação Lagrangeana como para a Euleriana, aproxima-se o contínuo por elementos isoparamétricos quadráticos, e a análise de estado plano de tensão e deformação, e de sólidos de revolução é efetuada. Para a solução de problemas de estruturas de superfície, como placas e cascas, degenerou-se elementos tridimensionais quadráticos obtendo-se com este procedimento resultados bastantes satisfatórios. As soluções de vários exemplos são discutidas e comparadas, e algumas conclusões apresentadas.

ABSTRACT

Through the finite element method, the non-linear behavior of problems involving large deformation and plasticity is analysed. Both for Lagrangian and Eulerian formulation, the continuous is approximated by quadratic isoparametric elements, and the analysis of plane stress, plane strain and revolution solids is effected. For the solution of surface structural problems, such as plates and shells, quadratic tridimensional elements were degenerated and quite satisfactory results were obtained with this procedure. The solutions to various examples are discussed and compared, and certain conclusions are presented.

ÍNDICE

Capítulos:	Páginas:
INTRODUÇÃO	1
I FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	4
1.1 O Referencial	4
1.2 Tensor de Deformação	5
1.3 Equações de Equilíbrio	8
1.4 Tensores de Piola-Kirchhoff, Equações de Equilíbrio na Descrição Referencial	11
1.5 Princípio dos Trabalhos Virtuais	15
1.6 Discretização e Aproximação do Contínuo	17
1.7 Métodos de Solução	20
1.8 Algoritmos Implementados	21
1.8.1 Solução Incremental	22
1.8.2 Solução Iterativa - Método de Newton-Raphson	23

Capítulos:		Páginas:
	1.8.3 <i>Solução Mista</i>	24
	1.9 Critérios de Convergência	26
II	ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS	32
	2.1 Forma Explícita da Formulação Lagrangeana	32
	2.2 Forma Explícita da Formulação Euleriana	40
	2.3 Estado Plano de Tensão e Deformação, Formulação Lagrangeana	45
	2.4 Sólido Axissimétrico, Formulação Lagrangeana	48
	2.5 Elementos Implementados	50
III	NÃO-LINEARIDADE FÍSICA	54
	3.1 Elasticidade Linear e Hiperelasticidade	55
	3.2 Hipoelasticidade	57
	3.2.1 O Modelo Elasto-Plástico	60
	3.2.1.1 Relações Constitutivas	65
	3.2.1.2 Cálculo das Tensões Elasto-Plásticas	75
	3.2.2 Outros Modelos	82
IV	RESULTADOS DE ANÁLISE	83
	4.1 Casca Esférica	84

Capítulos:	Páginas:
4.2 Cilindro Sujeito a Pressão Interna ..	88
4.3 Casca Esférica com Carregamento Dis_	
tribuído Uniformemente	95
4.4 Placa Circular	100
CONCLUSÕES	109
BIBLIOGRAFIA	111
SIMBOLOGIA	116

INTRODUÇÃO

Recentemente, tem-se investido um considerável esforço nas aplicações do método dos elementos finitos à análise de problemas não-lineares na mecânica das estruturas. O estudo da não-linearidade geométrica e física, ou a consideração desses efeitos em conjunto, tem sido motivo de diversas aproximações.

A utilização de elementos finitos isoparamétricos para grandes deformações e plasticidade, foi primeiramente apresentada por Zienkiewics (2).

Na análise não-linear, a formulação geralmente é definida segundo três classes; métodos incrementais que não consideram o desequilíbrio, soluções diretas das equações não-lineares e métodos incrementais que verificam o equilíbrio. Neste trabalho deu-se preferência aos pertencentes ao último grupo onde a principal condição dos métodos de soluções sequenciais é

atendida, não permitindo que os erros sejam acumulativos.

Utilizando-se tanto da formulação Lagrangeana como da Euleriana, o estudo do contínuo é feito com uso de tensores de deformação de Green ou Almansi, sem introduzir as aproximações próprias de teorias de corpos orientados.

Para derivação das leis constitutivas dos problemas de não-linearidade física valeu-se da teoria clássica de plasticidade, onde as relações entre tensão e deformação dependem da história destas componentes, isto é, o material tem uma memória associada com o seu comportamento. Devido a dificuldade, portanto, de definir as leis do material para um estado complexo de tensão, vários critérios de plasticidade foram incorporados.

Tanto na análise de problemas de estado plano de tensão ou deformação como no de estruturas axissimétricas com carregamentos de revolução, utilizou-se de elementos finitos isoparamétricos quadráticos. Para a análise de estruturas de superfície, tentando não se limitar a problemas de simetria axial, fez-se uso de elementos finitos degenerados de elementos isoparamétricos tridimensionais.

A apresentação do trabalho é feita em quatro capítulos. No primeiro os princípios básicos da mecânica do contínuo para formulação das equações de equilíbrio são escritos

e sua solução por meio de elementos finitos é discutida. Elementos isoparamétricos e sua especialização para a análise não-linear geométrica são derivados no Capítulo II. No capítulo seguinte o problema da não-linearidade física é introduzido e as relações constitutivas desenvolvidas para o estudo de modelo elástico e elasto-plástico. Os resultados dos exemplos analisados são apresentados e comparados no último capítulo. Algumas conclusões são comentadas.

Os procedimentos automáticos de análise foram programados em linguagem ALGOL (Sistema B-6700 NCE/UFRJ), para serem implementados na linguagem LORANE/NL (19).

CAPÍTULO I

FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

1.1 O REFERENCIAL

Na mecânica do contínuo dois tipos de descrição são comumente usados, a descrição referencial e a espacial (1).

Na primeira as variáveis independentes são a posição x_1 de uma partícula numa configuração de referência arbitrária e o tempo t . Na teoria da elasticidade a configuração de referência escolhida é o estado natural. Quando esta configuração é a inicial em $t = 0$ a descrição passa a ser conhecida por Lagrangiana. Alguns autores denominam esta descrição de material e a variável independente x_1 como coordenada material.

Na descrição espacial as variáveis independentes são a posição presente \bar{x}_1 ocupada pela partícula no tempo t e o próprio tempo t . Esta descrição é particularmente usada em mecânica

nica dos fluidos e conhecida por Euleriana.

Para definição de grandes deformações, diversas alternativas são propostas, seguindo duas classes; definição em termos da configuração não deformada e da deformada. A introdução do sistema de coordenadas é feita na primeira classe com o uso da descrição referencial na configuração não-deformada (formulação Lagrangeana) e na segunda com a descrição espacial na configuração deformada (Euleriana).

A formulação Lagrangeana é mais adequada para a teoria da elasticidade porque nela, usualmente, se assume o estado de referência não-deformado, ao qual o corpo retorna quando descarregado. Entretanto, as equações de equilíbrio devem ser satisfeitas na configuração deformada ou atual e para isso as tensões devem ser definidas neste sistema de referência. Para as relações entre tensões e deformações deve-se ter o tensor de deformação referenciado à configuração deformada ou o de tensões à não-deformada, obtendo-se assim os tensores em um mesmo sistema de referência.

1.2 TENSOR DE DEFORMAÇÃO

Considerando o sistema de coordenadas cartesianas fixo da Figura 1.1, ao qual todas as variáveis são definidas,

um ponto x_i que sofre um deslocamento u_i atinge a posição \bar{x}_i da da por:

$$\bar{x}_i = x_i + u_i \quad (1.1)$$

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.2)$$

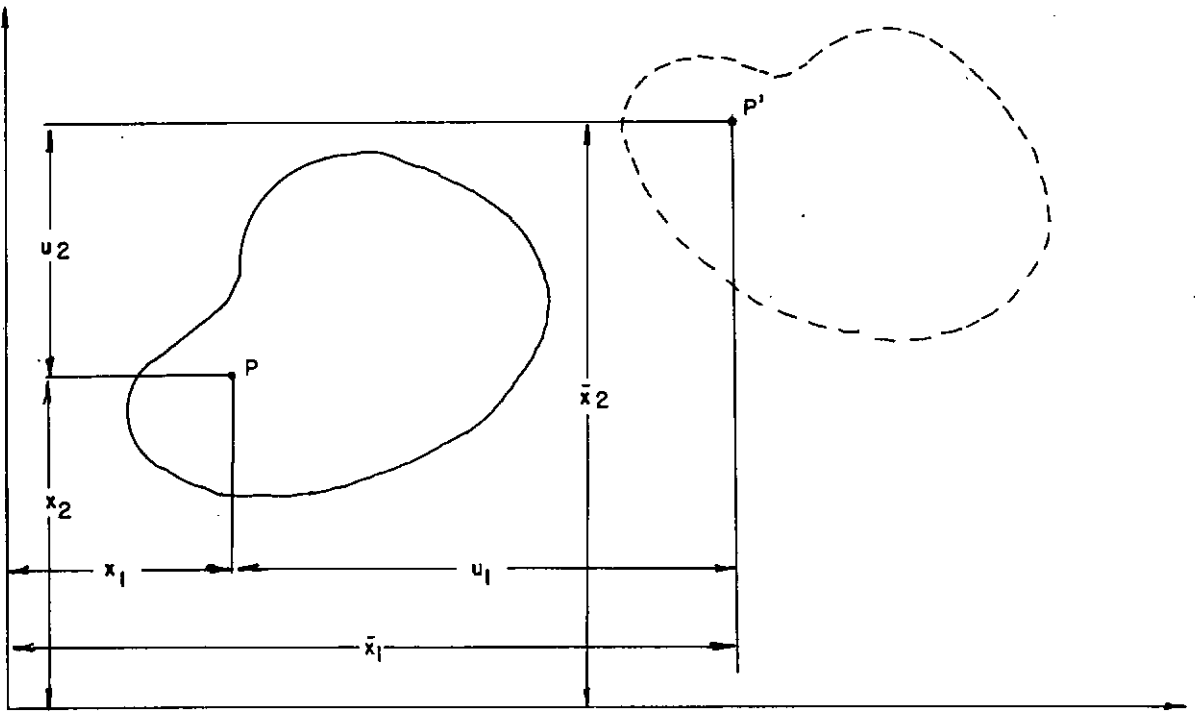


FIGURA 1.1 - Definição das Coordenadas Lagrangeanas e Eulerianas.

Em função deste deslocamento a expressão geral do tensor de deformação toma a forma:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.3)$$

Se as derivadas parciais dos deslocamentos com respeito às coordenadas materiais são pequenas comparadas à unidade, os quadrados e produtos destas derivadas podem ser desprezados em presença dos termos lineares, obtendo-se as componentes do tensor para pequenas deformações. A análise de metais, por exemplo, é adequada a esta hipótese. Para materiais vulcanizados e plásticos sintéticos o uso de deformações finitas se faz necessário. A análise plástica de metais também conduz a grandes deformações existindo porém uma considerável parcela que pertence ao contexto da teoria de pequenas deformações.

Para a descrição espacial a equação (1.1) é reescrita sendo agora u_i função de \bar{x}_i :

$$x_i = \bar{x}_i - u_i \quad (1.4)$$

$$u_i = u_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t) \quad (1.5)$$

ficando o tensor de deformações definido por:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \bar{x}_i} - \frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial \bar{x}_j} \right) \quad (1.6)$$

Quando os quadrados e produtos das derivadas podem ser omitidos, estas componentes também se reduzem a forma de pequenas deformações, sendo que para pequenos deslocamentos como na teoria clássica da elasticidade não há distinção entre as duas definições.

ϵ_{ij} é usualmente conhecido por tensor de deformações Lagrangeanas ou de Green e $\bar{\epsilon}_{ij}$ por tensor de deformações Eulerianas ou, também, por tensor de Cauchy para deformações infinitesimais e de Almansi para deformações finitas.

É de ressaltar que as componentes de deformação finita envolvem somente termos lineares e quadráticos nas componentes do gradiente de deslocamento. Este tensor é completo e não uma simples aproximação de segunda ordem.

1.3 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O princípio do "momentum" para um conjunto de partículas estabelece que a variação em relação ao tempo do "momentum"

total é igual a soma vetorial de todas as forças externas que atuam nas partículas deste conjunto, já que a terceira lei de Newton, de ação e reação, governa as forças internas. Este princípio, estendido ao meio contínuo, constitui um postulado básico da mecânica.

Seja uma dada massa m , em deformação, ocupando instantaneamente um volume \bar{V} limitado pela superfície \bar{S} sob a ação de forças de superfície \bar{t}_i e forças de volume \bar{f}_i como na Figura 1.2.

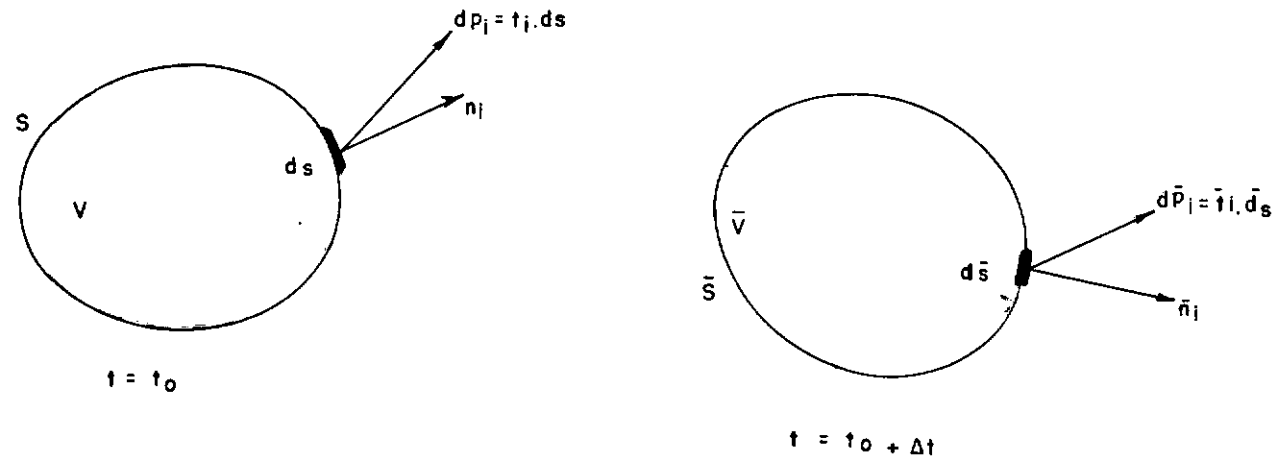


FIGURA 1.2 - Configuração inicial e sob deformação de um corpo de massa m .

A variação do "momentum" total desta massa é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\bar{V}} \bar{\rho} \bar{v}_i d\bar{V} \right) \quad (1.7)$$

onde:

$$\bar{\rho} = \frac{dm}{d\bar{V}}, \quad \bar{v}_i = \frac{d\bar{x}_i}{dt}$$

e $\frac{d}{dt}$ a derivada em relação ao tempo na descrição referencial.

Tem-se então pelo princípio do "momentum":

$$\int_{\bar{S}} \bar{t}_i d\bar{S} + \int_{\bar{V}} \bar{f}_i d\bar{V} = \frac{d}{dt} \int_{\bar{V}} \bar{\rho} \bar{v}_i d\bar{V} \quad (1.8)$$

Aplicando-se o teorema da divergência e substituindo \bar{t}_i por $\bar{\sigma}_{ji} \cdot \bar{n}_j$ em (1.8), chega-se a:

$$\int_{\bar{V}} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}_{ji}}{\partial \bar{x}_j} + \bar{f}_i - \bar{\rho} \frac{d\bar{v}_i}{dt} \right) d\bar{V} = 0 \quad (1.9)$$

e para um volume arbitrário, em cada ponto tem-se:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ji}}{\partial \bar{x}_j} + \bar{f}_i = \bar{\rho} \frac{d\bar{v}_i}{dt} \quad (1.10)$$

que são as equações de movimento de Cauchy.

No caso particular de equilíbrio estático, onde a aceleração é nula, tem-se em cada ponto:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ji}}{\partial \bar{x}_j} + \bar{f}_i = 0 \quad (1.11)$$

que são as equações de equilíbrio.

Estas equações não contém nenhuma variável cinemática e não são, geralmente, suficientes para se conhecer o estado de tensão, pois constituem três equações diferenciais de primeira ordem para seis componentes de tensão incógnitas ($\bar{\sigma}_{ji} = \bar{\sigma}_{ij}$). Equações adicionais são introduzidas através de relações constitutivas.

1.4 TENSORES DE PIOLA-KIRCHHOFF, EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO NA DESCRIÇÃO REFERENCIAL

O tensor de tensões de Cauchy, $\bar{\sigma}_{ij}$, é definido em função das coordenadas espaciais \bar{x}_i e com uma adequada definição de deformação, a formulação Euleriana é desenvolvida em termos da descrição espacial na configuração deformada.

Quando o tensor de deformação é definido na descrição referencial o de tensões deve ser expresso como função das coordenadas materiais e as equações de equilíbrio derivadas no estado de referência. Os tensores de Piola-Kirchhoff aparecem como alternativa para a representação de tensões neste estado de referência. O primeiro é de definição mais simples conduzindo a equações de equilíbrio em todo semelhantes, exceto que a derivação é tomada em relação as coordenadas materiais. O grande inconveniente que surge no seu emprego é a sua assimetria. O segundo tensor é simétrico, assim como o de Cauchy, sendo então preferido na formulação de grandes deformações, conduzindo a uma forma mais complexa das equações de equilíbrio e movimento. O que se procura, portanto, são expressões de força por unidade de área indeformada.

O primeiro tensor, σ_{j1}^* , fornece a força real $d\bar{P}_1$ na superfície $d\bar{S}$, por unidade de área indeformada dS , e expressa a força em função da normal n_1 no ponto x_1 em dS . (Figura 1.2).

$$(\sigma_{j1}^* \cdot n_j) \cdot dS = d\bar{P}_1 = (\bar{\sigma}_{j1} \cdot \bar{n}_j) \cdot d\bar{S} \quad (1.12)$$

O segundo tensor, σ_{ji} , ao invés da força real $d\bar{P}_1$ em $d\bar{S}$, fornece uma força dP_1 relacionada a $d\bar{P}_1$ da mesma forma que o vetor dx_1 em x_1 esta relacionado pela deformação a um vetor $d\bar{x}_1$ em \bar{x}_1 . (Figura 1.2).

$$dP_j = J_{ji}^{-1} \cdot d\bar{P}_i \quad (1.13)$$

assim como

$$dx_j = J_{ji}^{-1} d\bar{x}_i \quad (1.14)$$

onde

$$J_{ji} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \quad (1.15)$$

Os tensores de Piola-Kirchhoff podem ser expressos em função do tensor de Cauchy.

$$\sigma_{ji}^* = |J| \cdot J_{jk}^{-1} \cdot \bar{\sigma}_{ki} \quad (1.16)$$

e

$$\sigma_{ji} = |J| \cdot J_{j\ell}^{-1} \cdot \bar{\sigma}_{\ell k} \cdot (J_{ki}^{-1})^T = \sigma_{jk}^* \cdot (J_{ki}^{-1})^T \quad (1.17)$$

As relações inversas são:

$$\bar{\sigma}_{ji} = |J|^{-1} \cdot J_{jk} \cdot \sigma_{ki}^* \quad (1.18)$$

e

$$\bar{\sigma}_{ji} = |J|^{-1} \cdot J_{j\ell} \cdot \sigma_{\ell k} \cdot J_{ki} \quad (1.19)$$

Pode-se notar, através da equação (1.16), que o primeiro tensor geralmente não é simétrico.

A equação de equilíbrio na descrição referencial tem então o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}^*}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (1.20)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{jk} \cdot J_{ki}^T) + f_i = 0 \quad (1.21)$$

onde

$$f_i = \rho \cdot b_i \quad \text{e} \quad \rho = \frac{m}{V} \quad (1.22)$$

1.5 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

O trabalho virtual δW das forças de superfície \bar{t}_i e das de volume \bar{f}_i é dado por:

$$\delta W = \int_{\bar{S}} \bar{\sigma}_{ji} \cdot \bar{n}_j \cdot \delta u_i \, d\bar{S} + \int_{\bar{V}} \bar{f}_i \cdot \delta u_i \, d\bar{V} \quad (1.23)$$

onde δu_i é o deslocamento virtual sobre a configuração de equilíbrio. Supõe-se que as funções δu_i tenham as primeiras derivadas parciais em relação a \bar{x}_i contínuas e que $\delta u_i = 0$ nos pontos da superfície onde os deslocamentos reais u_i são prescritos, satisfazendo as condições de contorno.

Substituindo em (1.23) $\bar{t}_i \, d\bar{S}$ por $t_i^* \, dS$ e δu_i por $\delta \bar{x}_i$ pois $u_i = \bar{x}_i - x_i$, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_S \sigma_{ji}^* \cdot n_j \cdot \delta \bar{x}_i \cdot dS + \int_V f_i \cdot \delta \bar{x}_i \, dV = \\ &= \int_V \sigma_{ji}^* \cdot \delta J_{ji} \, dV \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde:

$$t_i^* = \sigma_{ji}^* \cdot n_j$$

$$d\bar{V} = |J| dV$$

(1.25)

$$f_i = \rho b_i = |J| \bar{f}_i$$

$$\delta J_{ji} = \frac{\partial \delta \bar{x}_i}{\partial x_j}$$

Fazendo agora $\sigma_{ji}^* = \sigma_{jk} J_{ki}^T$ (equação 1.16) em (1.24) obtem-se:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_S \sigma_{jk} \cdot J_{ki}^T \cdot n_j \delta \bar{x}_i dS + \int_V f_i \cdot \delta \bar{x}_i dV = \\ &= \int_V \sigma_{jk} \cdot J_{ki}^T \cdot \delta J_{ji} dV \end{aligned} \quad (1.26)$$

Atendendo as transformações da referência (1) pode-se escrever:

$$\delta W = \int_V \sigma_{ji} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_{\bar{V}} \bar{\sigma}_{ji} \delta \bar{\epsilon}_{ij} d\bar{V} \quad (1.27)$$

onde $\delta \epsilon_{ij}$ e $\delta \bar{\epsilon}_{ij}$ são as variações de deformação definidas em (1.3) e (1.6). As equações (1.27) e (1.26) (ou 1.24) fornecem

as expressões do trabalho devido ao deslocamento virtual em função dos tensores de Piola-Kirchhoff sendo a integração sobre a superfície e o volume indeformados.

1.6 DISCRETIZAÇÃO E APROXIMAÇÃO DO CONTÍNUO

Na formulação das equações da mecânica do contínuo, não foi introduzida nenhuma restrição, ficando então incluído todos os efeitos que caracterizam o comportamento não-linear. A solução em ambas as descrições apresentadas é atingida com eficiência pelo método dos elementos finitos (2,3,4,5 e 6).

Assim, aproximando o contínuo elemento por elemento pela definição de interpolações adequadas, tem-se para um elemento genérico

$$u_i = N_{ij} \delta_j \quad (1.28)$$

onde δ_j é o vetor de deslocamentos nodais do elemento, contendo todas as componentes relativas aos pontos nodais que conectam este elemento com os adjacentes. N_{ij} é a matriz formada pelas funções de interpolação que definem os deslocamentos u_i em qualquer ponto do elemento em função dos deslocamentos nodais.

Na apresentação que se segue a notação matricial se
rá adotada por ser especialmente conveniente em desenvolvimento
s numéricos voltados à computação e consagrada no âmbito do
método dos elementos finitos. De (1.28) tem-se então:

$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{\delta} \quad (1.29)$$

A partir da equação (1.29) e utilizando as relações
entre deformações específicas e deslocamentos, por derivação pode
de-se sempre escrever:

$$d\underline{\bar{\epsilon}} = \underline{\bar{B}} \cdot d\underline{\delta} \quad (1.30)$$

para o incremento de deformação Euleriana ou

$$d\underline{\epsilon} = \underline{B} \cdot d\underline{\delta} \quad (1.31)$$

para o Lagrangeano.

Pela substituição em (1.27) de (1.30) e (1.31) ob-
tem-se:

$$\bar{\Psi} = \bar{R} - \int_{\bar{V}} \underline{\bar{B}}^T \cdot \underline{\bar{\sigma}} \cdot d\bar{V} \quad (1.32)$$

e,

$$\underline{\psi} = \underline{R} - \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot dV \quad (1.33)$$

que são as equações de equilíbrio em cada configuração.

Pela introdução de forças equivalentes nodais às forças externas tem-se respectivamente:

$$\underline{\bar{R}} = \int_{\bar{V}} \underline{N}^T \cdot \underline{\bar{f}} \cdot d\bar{V} + \int_{\bar{S}} \underline{N}^T \cdot \underline{\bar{t}} \cdot d\bar{S} \quad (1.34)$$

e,

$$\underline{R} = \int_V \underline{N}^T \cdot \underline{f} \cdot dV + \int_S \underline{N}^T \cdot \underline{J} \cdot \underline{t} \cdot dS \quad (1.35)$$

Os segundos termos das equações (1.32) e (1.33) podem ser interpretados como forças de reação interna e $\underline{\psi}$ e $\underline{\bar{\psi}}$ como forças residuais, sendo que a necessidade de equilíbrio nodal implica em reduzi-las tão próximas de zero quanto possível.

Como \underline{R} e \underline{B} dependem dos parâmetros nodais $\underline{\delta}$, e as tensões são funções não-lineares das deformações, o conjunto de equações acima é não-linear e, portanto, técnicas especiais de solução deverão ser usadas.

1.7 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Os algoritmos de resolução de sistemas de equações algébricas não-lineares, de interesse para a aplicação dos métodos dos elementos finitos, são os que a partir de uma estimativa inicial a aproximação da solução é gerada por um conjunto pré-determinado de operações que deverão convergir para a solução exata se atenderem certas condições. Tais métodos são conhecidos por métodos sequenciais (4) e podem ser representados por uma fórmula de recorrência do tipo:

$$\underline{X}^{i+1} = \underline{X}^i + \beta^i \cdot \underline{D}^i \quad (1.36)$$

onde \underline{X}^i é a aproximação da solução na etapa i e $\beta^i \underline{D}^i$ sua correção, sendo \underline{D}^i o vetor que determina a direção da correção e β^i o escalar que define a intensidade. A variação entre cada etapa é linear, podendo-se incluir em (1.36) termos que envolvem \underline{X}^{i-1} , \underline{X}^{i-2} , etc para se obter extrapolações de ordem superior.

A contestação matemática decorrente dos esquemas numéricos para a solução de sistemas de equações algébricas não-lineares é bem estabelecida por Oden (4) e Issacson (7). Na referência (4) dá-se maior ênfase aos métodos de minimização, de Newton-Raphson, incremental e incremental modificado, de integração numérica e métodos que envolvem minimização através de

programação matemática. Issacson comenta também a possibilidade de se agregar aceleradores de convergência sendo que em Irons (8) e Nayak (6) algumas alternativas são propostas.

Dentro dos métodos sequenciais uma outra classificação pode ser feita para os procedimentos de solução de sistemas não-lineares. Métodos fundamentalmente incrementais, que não necessariamente verificam o equilíbrio em cada etapa e métodos que consideram as parcelas não-balanceadas para correção da configuração real de equilíbrio. No presente trabalho fixou-se a atenção somente em métodos pertencentes ao último grupo.

1.8 ALGORITMOS IMPLEMENTADOS

A equação (1.32) ou (1.33) pode ser escrita em função de um parâmetro de proporcionalidade das cargas λ .

$$\underline{\psi} = \underline{\psi}(\underline{\delta}, \lambda) = \underline{Q}(\underline{\delta}, \lambda) - \underline{F}(\underline{\delta}) = \underline{0} \quad (1.37)$$

onde \underline{F} representa as forças internas que equilibram o carregamento externo \underline{Q} , idêntico a \underline{R} (equações (1.34) e (1.35)) para $\lambda = 1$.

Foram utilizados os seguintes procedimentos para a solução das equações acima.

1.8.1 SOLUÇÃO INCREMENTAL

A equação (1.37) é considerada como função de um único parâmetro λ e a sua diferenciação conduz a:

$$\frac{d\psi}{d\lambda} = \lambda \cdot \frac{dQ}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{d\lambda} + Q - \frac{dF}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{d\lambda} \quad (1.38)$$

Introduzindo as definições

$$dQ = - K_{\lambda} \cdot d\delta \quad (1.39)$$

onde K_{λ} é conhecida como matriz de rigidez de carga inicial nu la para carregamentos conservativos e

$$dF = K_T \cdot d\delta \quad (1.40)$$

onde K_T é a matriz de rigidez tangente, à equação (1.37) tem-se:

$$\frac{d\psi}{d\lambda} = Q - K_T \cdot \frac{d\delta}{d\lambda} = 0 \quad (1.41)$$

Considerando pequenos incrementos do parâmetro λ sua solução fornece,

$$\Delta\delta = (K_T)^{-1} \cdot Q \cdot \Delta\lambda \quad (1.42)$$

Assim a partir de condições de equilíbrio iniciais conhecidas, a solução é obtida tomando-se pequenos incrementos de λ para que garanta uma convergência adequada.

1.8.2 SOLUÇÃO ITERATIVA - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O parâmetro de carga λ é agora mantido fixo e a solução da equação (1.37) é obtida iterativamente, atendendo a uma aproximação que se tenha estabelecido. A introdução de $d\lambda \rightarrow 0$ na equação (1.41) leva a:

$$d\psi = - (K_T) \cdot d\delta \quad (1.43)$$

e se a n -ésima iteração de δ_n conduz ainda a forças residuais

ψ_n não nulas, uma nova iteração é feita com

$$\delta_{n+1} = \delta_n + \Delta\delta_n \quad (1.44)$$

onde:

$$\Delta\delta_n = - (K_T)^{-1} \cdot \psi_n \quad (1.45)$$

Para economia do esforço computacional uma alternativa que se apresenta é manter a matriz K_T inalterada em diversas iterações sucessivas. Este procedimento é conhecido por Método de Newton-Raphson modificado.

As condições de existência e unicidade das soluções obtidas pelos métodos incrementais e iterativos são discutidos em Oden (4).

1.8.3 SOLUÇÃO MISTA

Para este tipo de solução o parâmetro de carga λ é incrementado em várias etapas. Em cada uma a primeira aproximação da solução é obtida pelo processo incremental e o valor da matriz K_T calculada para a configuração inicial da etapa. Com esta primeira aproximação para os deslocamentos, a força re

sidual ψ_0 é calculada e a iteração tem início, podendo ser feita em uma das seguintes maneiras:

- a) usando as equações (1.43) e (1.45) e atualizando continuamente a matriz K_T ;
- b) procedendo como em (a) mas mantendo a matriz de rigidez com seu valor original ou recalculada para a primeira iteração, constante no incremento.

Os procedimentos (a) e (b) podem ser generalizados fornecendo-se como opção a atualização da matriz de rigidez em qualquer instante que se fizer necessário.

Existe, portanto, diversas alternativas de procedimentos para a solução do sistema de equações algébricas não-lineares e a escolha do algoritmo se faz em função do tipo de problema a ser analisado ou seja, do grau de não-linearidade envolvido, da precisão requerida, da facilidade de aplicação, do número de equações a serem resolvidos e do esforço computacional.

A acumulação sucessiva de erros residuais em soluções incrementais, de problemas acentuadamente não-lineares, pode redundar em aproximações grosseiras da solução real. Uma maior precisão só é alcançada com incrementos muito pequenos, requerendo, na maior parte dos casos, maior esforço computacional do que o método de Newton-Raphson convencional sem contudo atin

gir o mesmo grau de precisão. Para uma primeira estimativa, ou dependendo da aproximação que se queira, a solução incremental pode ser muito eficiente sendo também bastante divulgada na solução de problemas de não-linearidade física.

Processos puramente iterativos são muito simples de serem aplicados e rápidos, do ponto de vista computacional. A única restrição que se faz à sua utilização é que sua convergência só é assegurada para problemas onde a solução não-linear difere pouco da linear.

Para problemas altamente não-lineares e para uma boa precisão dos resultados, o melhor algoritmo é o da solução mista, onde para cada incremento de carga o equilíbrio é atendido através de iterações sucessivas. O seu grande inconveniente é o tempo de computação que se torna excessivo pela necessidade da atualização da matriz de rigidez.

1.9 CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Nos processos iterativos ou mistos são necessários alguns testes para se assegurar a convergência da solução dentro de uma precisão estabelecida. Diversas possibilidades ocorrem, mas a condição principal que os métodos de solução devem atender é que os erros não podem ser acumulativos. Para isso,

em cada incremento de carga e em todas as iterações, as forças não-balanceadas (residuais) devem ser computadas.

Os critérios de convergência para problemas não-lineares são geralmente classificados em três grupos: critérios de força, de tensões e de deslocamentos (9). Os primeiros são baseados na comparação entre as forças residuais e o carregamento externo. A norma

$$\|\underline{\psi}\| = \underline{\psi}^T \cdot \underline{\psi} \quad (1.46)$$

das forças residuais é comparada com uma percentagem da norma $\|R\|$ das forças aplicadas. Uma segunda alternativa é a comparação entre o maior termo de $\underline{\psi}$, em valor absoluto, com uma fração da norma $\|\Delta R\|$ do incremento de carga.

O segundo grupo envolve comparações entre as variações de tensão durante uma iteração com valores pré-estabelecidos e, geralmente, são empregados para treliças, cabos e membranas sob efeito de grandes deformações.

Critérios relativos a deslocamentos são, porém, os mais usuais e três alternativas ocorrem:

Norma absoluta modificada:

$$\| \gamma \|_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta \delta_i}{\delta_i} \right| \quad (1.47)$$

Norma Eucladiana modificada:

$$\| \gamma \|_2 = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta \delta_i}{\delta_i} \right|^2 \right]^{1/2} \quad (1.48)$$

Norma máxima:

$$\| \gamma \|_3 = \max \left| \frac{\Delta \delta_i}{\delta_i} \right| \quad (1.49)$$

onde δ_i são os deslocamentos na iteração atual, $\Delta \delta_i$ a variação destes deslocamentos em relação aos da iteração anterior e n o número de incógnitas envolvidas. As normas Eucladiana e absoluta são modificadas pela introdução do termo n dividindo-as, para que se obtenha quantidades independentes do número total das componentes de deslocamentos. Em todos os critérios $\| \gamma \|$ é comparado com um valor pré-estabelecido ou com uma percentagem da norma $\| \delta_i \|$ dos deslocamentos.

Para a análise dos tipos de norma, foram usados os resultados da referência (9) e na Figura 1.3 estão plotados os valores de $\|\gamma\|$ definidos por (1.47), (1.48) e (1.49) em função do número de iterações na análise de problemas de comportamento pós-crítico de placa delgada (fortemente não-linear) e casca a batida (moderadamente não-linear) sendo utilizado para as soluções o método de Newton-Raphson.

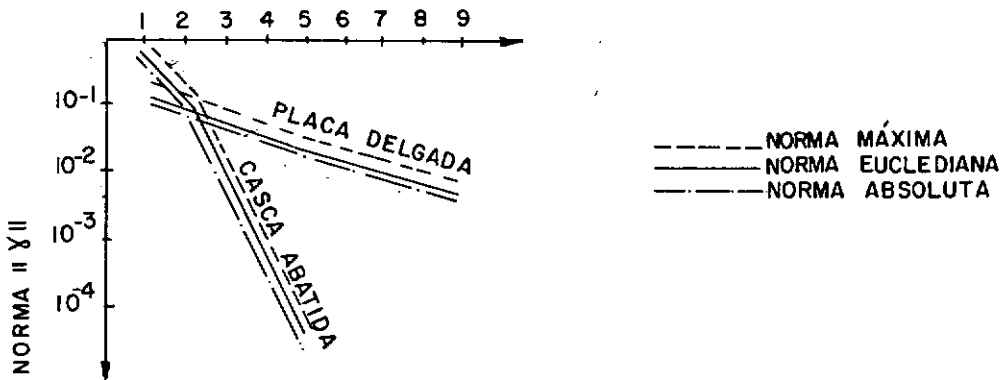


FIGURA 1.3 - Comparação entre critérios de convergência.

Basicamente as curvas se mantêm paralelas, indicando ser irrelevante a escolha do tipo de critério de convergência desde que se adote uma tolerância adequada.

O uso de normas que garantem limites médios de propagação de erro está intimamente ligado a dispersão dos valores de $\Delta\delta_i/\delta_i$. Nos casos de grande dispersão a norma máxima

$\|\gamma\|_3$ pode ser preferida para fornecer um limite absoluto para todas as variáveis.

Uma expressão para o erro total pode ser obtida to mando-se

$$E_j \leq \int_{i=j}^{\infty} \|\gamma\| d_i \quad (1.50)$$

onde j é a iteração atual.

Pela Figura 1.3 verifica-se que a convergência se estabiliza rapidamente numa relação linear e como as curvas es tão plotadas em escala semi-logaritma $\|\gamma\|$ pode ser aproximado por:

$$\|\gamma\| = e^{\alpha - \beta_i} \quad (1.51)$$

ou

$$\log \|\gamma\| = \alpha - \beta_i$$

onde os coeficientes α e β_i são obtidos através de dois valores já determinados de $\|\gamma\|$.

Substituindo estas equações na (1.50) obtem-se:

$$E_j \leq \frac{1}{\beta_1} e^{\alpha - \beta_1} \quad (1.52)$$

conhecida por norma integrada, sendo sua principal característica a análise quantitativa do erro total obtido nas soluções iterativas.

Na análise não-linear física, para métodos de solução mista, um outro tipo de critério pode ser utilizado (6). A variação do trabalho plástico dW_p^i durante uma iteração é calculado e comparado com uma parcela do trabalho realizado durante o incremento de carga.

CAPÍTULO II

ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

Na análise não-linear geométrica, o uso de elementos isoparamétricos (6) permite a utilização direta do enfoque da mecânica do contínuo, sendo alguns princípios sumarizados no capítulo anterior. Realmente, nenhuma restrição própria de teorias de corpos orientados será introduzida neste contexto. Deve-se acrescentar a este fato a excelente performance deste tipo de elemento finito na análise linear elástica. Além disso, as restrições e aproximações decorrentes de especializações de teorias de vigas, placas ou cascas podem ser introduzidas e a formulação na essência permanece inalterada.

2.1 FORMA EXPLÍCITA DA FORMULAÇÃO LAGRANGEANA

Nas derivações pertinentes ao método dos elementos finitos uma apresentação explícita das características de um só

lido tridimensional se faz necessário e com este propósito reporta-se a notação difundida por Zienkiewicz e outros (5 e 6).

O tensor de Green definido em (1.3) é agora reescrito como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^0 + \underline{\underline{\varepsilon}}^L \quad (2.1)$$

onde:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

é o tensor de deformações infinitesimais e

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta_{\sim x}^T & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{\sim y}^T & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{\sim z}^T \\ \theta_{\sim y}^T & \theta_{\sim x}^T & 0 \\ 0 & \theta_{\sim z}^T & \theta_{\sim y}^T \\ \theta_{\sim z}^T & 0 & \theta_{\sim x}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_{\sim x} \\ \theta_{\sim y} \\ \theta_{\sim z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\theta}} \quad (2.3)$$

a contribuição não-linear, com:

$$\underline{\theta}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (2.4)$$

A partir da expressão (1.29), $\underline{u} = \underline{N} \underline{\delta}$, e utilizando as relações entre deformações específicas e deslocamentos, tem-se, após a diferenciação de $\underline{\epsilon}^0$:

$$d\underline{\epsilon}^0 = \underline{B}^0 \cdot d\underline{\delta} \quad (2.5)$$

com:

$$\underline{B}_i^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

para um nó i genérico.

A diferenciação de $\underline{\varepsilon}^L$ conduz a

$$d\underline{\varepsilon}^L = \underline{A} d\underline{\theta} \quad (2.7)$$

sendo que $\underline{\theta}$, definido em (2.4), é escrito agora como:

$$\underline{\theta} = \underline{G} \cdot \underline{\delta} = \begin{bmatrix} G_1 & \dots & G_1 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

onde:

$$G_1 = \begin{bmatrix} \underline{I}_3 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \underline{I}_3 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \underline{I}_3 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

e \underline{I}_3 , a matriz identidade 3×3 .

Substituindo então $\underline{\theta}$ na equação (2.7), tem-se:

$$d\underline{\epsilon}^L = \underline{B}^L d\underline{\delta} \quad (2.10)$$

com

$$\underline{B}^L = \underline{A} \cdot \underline{G} \quad (2.11)$$

Tendo-se em conta que $\bar{x} = x + u$, $\bar{y} = y + v$ e $\bar{z} = z + w$ a matriz \underline{B} , da equação (1.31), é obtida pela soma dos termos de \underline{B}^0 com \underline{B}^L :

$$d\underline{\epsilon} = \underline{B} d\underline{\delta} = (\underline{B}^0 + \underline{B}^L) d\underline{\delta} \quad (2.12)$$

sendo para um nó i genérico:

(2.13)

$\frac{xe}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ze}{\overline{me}}$	$\frac{xe}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ze}{\overline{ve}}$	$\frac{xe}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ze}{\overline{ne}}$
$+$	$+$	$+$
$\frac{ze}{\overline{fNe}} \cdot \frac{xe}{\overline{me}}$	$\frac{ze}{\overline{fNe}} \cdot \frac{xe}{\overline{ve}}$	$\frac{ze}{\overline{fNe}} \cdot \frac{xe}{\overline{ne}}$
$\frac{ze}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ye}{\overline{me}}$	$\frac{ze}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ye}{\overline{ve}}$	$\frac{ze}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ye}{\overline{ne}}$
$+$	$+$	$+$
$\frac{ye}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ze}{\overline{me}}$	$\frac{ye}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ze}{\overline{ve}}$	$\frac{ye}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ze}{\overline{ne}}$
$\frac{ye}{\overline{fNe}} \cdot \frac{xe}{\overline{me}}$	$\frac{ye}{\overline{fNe}} \cdot \frac{xe}{\overline{ve}}$	$\frac{ye}{\overline{fNe}} \cdot \frac{xe}{\overline{ne}}$
$+$	$+$	$+$
$\frac{xe}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ye}{\overline{me}}$	$\frac{xe}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ye}{\overline{ve}}$	$\frac{xe}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ye}{\overline{ne}}$
$\frac{ze}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ze}{\overline{me}}$	$\frac{ze}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ze}{\overline{ve}}$	$\frac{ze}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ze}{\overline{ne}}$
$\frac{ye}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ye}{\overline{me}}$	$\frac{ye}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ye}{\overline{ve}}$	$\frac{ye}{\overline{fNe}} \cdot \frac{ye}{\overline{ne}}$
$\frac{xe}{\overline{fNe}} \cdot \frac{xe}{\overline{me}}$	$\frac{xe}{\overline{fNe}} \cdot \frac{xe}{\overline{ve}}$	$\frac{xe}{\overline{fNe}} \cdot \frac{xe}{\overline{ne}}$

= \tilde{B}_1^L

(2.14)

$\frac{ze}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{xe}{ze} + \frac{xe}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{ze}{ze}$	$\frac{ze}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{xe}{\Delta e} + \frac{xe}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{ze}{\Delta e}$	$\frac{ze}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{xe}{xe} + \frac{xe}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{ze}{xe}$
$\frac{ze}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{\Delta e}{ze} + \frac{\Delta e}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{ze}{ze}$	$\frac{ze}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{\Delta e}{\Delta e} + \frac{\Delta e}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{ze}{\Delta e}$	$\frac{ze}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{\Delta e}{xe} + \frac{\Delta e}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{ze}{xe}$
$\frac{\Delta e}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{xe}{ze} + \frac{xe}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{\Delta e}{ze}$	$\frac{\Delta e}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{xe}{\Delta e} + \frac{xe}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{\Delta e}{\Delta e}$	$\frac{\Delta e}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{xe}{xe} + \frac{xe}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{\Delta e}{xe}$
$\frac{ze}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{ze}{ze}$	$\frac{ze}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{ze}{\Delta e}$	$\frac{ze}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{ze}{xe}$
$\frac{\Delta e}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{\Delta e}{ze}$	$\frac{\Delta e}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{\Delta e}{\Delta e}$	$\frac{\Delta e}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{\Delta e}{xe}$
$\frac{xe}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{xe}{ze}$	$\frac{xe}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{xe}{\Delta e}$	$\frac{xe}{\tau_{Ne}} \cdot \frac{xe}{xe}$

$\tilde{B}_1 =$

Sendo $\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}$ etc, as componentes da matriz Jacobiana descrita na equação (1.15).

Finalmente, através do incremento da parcela das forças internas da equação (1.33), a expressão da matriz de rigidez definida em (1.40) é obtida.

$$d\underline{F} = d\left(\int_V \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} dV\right) = \int_V (d\underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} + \underline{B}^T \cdot d\underline{\sigma})dV \equiv \underline{K}_T \cdot d\underline{\delta} \quad (2.15)$$

Como \underline{B}^0 não varia com $\underline{\delta}$, a diferenciação de \underline{B}^T conduz a:

$$d\underline{B}^T = d\left[\begin{matrix} \underline{L} \\ \underline{B} \end{matrix}\right]^T = \underline{G} \cdot d\underline{A}^T \quad (2.16)$$

Além disso, definindo-se \underline{D}_T como a matriz tangente das propriedades físicas do material, pode-se escrever:

$$d\underline{\sigma} = \underline{D}_T \cdot d\underline{\epsilon} \quad (2.17)$$

e, após algumas transformações utilizando as propriedades da matriz θ (6), chega-se a:

$$\underline{K}_T = \int_V (\underline{G}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{G} + \underline{B}^T \cdot \underline{D}_T \cdot \underline{B}) dV \quad (2.18)$$

com

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{I}_3 \cdot \sigma_x & \underline{I}_3 \cdot \sigma_{xy} & \underline{I}_3 \cdot \sigma_{xz} \\ & \underline{I}_3 \cdot \sigma_y & \underline{I}_3 \cdot \sigma_{yz} \\ \text{SIM} & & \underline{I}_3 \cdot \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde σ_x , σ_y , σ_{xy} , etc são as componentes do segundo tensor de Piola-Kirchhoff.

2.2 FORMA EXPLÍCITA DA FORMULAÇÃO EULERIANA

A transição do sistema de referência Lagrangeano para o Euleriano é particularmente simples na formulação isoparamétrica e o cálculo da matriz de rigidez se processa de uma maneira similar.

Definindo as funções de interpolação \underline{N}_i em função

das coordenadas espaciais \bar{x} , \bar{y} e \bar{z}

$$\underline{N}_{-1} = \underline{N}_{-1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (2.20)$$

pode-se escrever o tensor de Almansi como:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^0 + \underline{\underline{\varepsilon}}^L \quad (2.21)$$

com

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial v}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

e

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^L = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\bar{A}}} \cdot \underline{\underline{\bar{\theta}}}$$

onde $\underline{\underline{\bar{A}}}$ e $\underline{\underline{\bar{\theta}}}$ têm a mesma forma de (2.3), sendo que a derivação é feita em relação às coordenadas espaciais.

Para as relações entre deformações específicas e deslocamentos, a expressão (2.14) é reescrita trocando-se as variáveis materiais pelas espaciais, obtendo-se assim a matriz $\underline{\underline{\bar{B}}}$ da equação (1.30), sendo para um nó genérico i :

$$\bar{\underline{\underline{B}}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial N_1}{\partial \bar{x}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \bar{z}} & \frac{\partial N_1}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \bar{z}} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \bar{x}} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Procedendo como anteriormente e observando que todos os termos são funções das coordenadas espaciais $\bar{\underline{x}}$ dependendo, portanto, dos parâmetros nodais $\underline{\delta}$, a expressão da matriz de rigidez é obtida, através do incremento da parcela das forças internas, equação (1.32)

$$\begin{aligned} d\bar{\underline{F}} &= d\left(\int_{\bar{\underline{V}}} \bar{\underline{\underline{B}}}^T \cdot \bar{\underline{\underline{\sigma}}} d\bar{\underline{V}}\right) = \int_{\bar{\underline{V}}} (d\bar{\underline{\underline{B}}}^T \cdot \bar{\underline{\underline{\sigma}}} d\bar{\underline{V}} + \bar{\underline{\underline{B}}}^T \cdot d\bar{\underline{\underline{\sigma}}} d\bar{\underline{V}} \\ &+ \bar{\underline{\underline{B}}}^T \cdot \bar{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot d(d\bar{\underline{V}})) = \bar{\underline{\underline{K}}}_T \cdot d\underline{\delta} \end{aligned} \quad (2.24)$$

As relações entre tensão e deformação são mais complexas e dadas por:

$$d\bar{\sigma} = d\bar{\sigma}_J + d\bar{T}\omega \cdot \bar{\sigma} \quad (2.25)$$

onde $d\bar{\sigma}_J$ é o incremento do tensor de Jaumann (6) definido como:

$$d\bar{\sigma}_J = \bar{D}_T \cdot d\bar{\epsilon} \quad (2.26)$$

sendo \bar{D}_T a matriz tangente das propriedades físicas do material mas referenciada a direções que variam para cada incremento e,

$$d\bar{T}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\omega}_y & \bar{\omega}_z \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\omega}_x & 0 & -\bar{\omega}_z \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{\omega}_x & \bar{\omega}_y & 0 \\ -\frac{1}{2}\bar{\omega}_z & \frac{1}{2}\bar{\omega}_z & 0 & -\frac{1}{2}\bar{\omega}_y & \frac{1}{2}\bar{\omega}_x & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\bar{\omega}_x & \frac{1}{2}\bar{\omega}_x & 0 & -\frac{1}{2}\bar{\omega}_z & \frac{1}{2}\bar{\omega}_y \\ \frac{1}{2}\bar{\omega}_y & 0 & -\frac{1}{2}\bar{\omega}_y & \frac{1}{2}\bar{\omega}_z & 0 & -\frac{1}{2}\bar{\omega}_x \end{bmatrix}$$

com

$$\bar{\omega}_x = d\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial w}{\partial \bar{y}}\right)$$

$$\bar{\omega}_y = d\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right) \quad (2.28)$$

$$\bar{\omega}_z = d\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial v}{\partial \bar{x}}\right)$$

Sendo

$$d(d\bar{V}) = (\bar{e}_x + \bar{e}_y + \bar{e}_z)d\bar{V} \quad (2.29)$$

a variação do volume $d\bar{V}$, onde

$$\bar{e}_x = d\left(\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{y}}\right)$$

$$\bar{e}_y = d\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right) \quad (2.30)$$

$$\bar{e}_z = d\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{x}}\right)$$

o incremento $d\bar{F}$ das forças internas pode ser expresso por:

$$d\bar{F} = \int_{\bar{V}} \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \bar{\mathbf{D}}_T \cdot \bar{\mathbf{B}} d\bar{V} \cdot d\delta + \int_{\bar{V}} \left[d\bar{\mathbf{B}}^T + \bar{\mathbf{B}}^T \cdot d\bar{\mathbf{T}}_w \right. \\ \left. + (\bar{\mathbf{e}}_x + \bar{\mathbf{e}}_y + \bar{\mathbf{e}}_z) \bar{\mathbf{B}}^T \right] \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\bar{V} = (\bar{\mathbf{K}}_0 + \bar{\mathbf{K}}_G) d\delta \quad (2.31)$$

Finalmente a variação $d\bar{\mathbf{B}}^T$ pode ser derivada a partir de:

$$d \left[\frac{\partial N_1}{\partial \bar{\mathbf{x}}_1} \right] = - \bar{\mathbf{J}}^{*T} \cdot \left[\frac{\partial N_1}{\partial \bar{\mathbf{x}}_1} \right] \quad (2.32)$$

com

$$\bar{\mathbf{J}}^{*T} = \frac{\partial (d\bar{\mathbf{u}}_1)}{\partial \bar{\mathbf{x}}_1} \quad (2.33)$$

2.3 ESTADO PLANO DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO, FORMULAÇÃO LAGRANGEANA

Para o estado plano de tensão ou deformação, o tensor de Green é dado por:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}]^T = \underline{\underline{\varepsilon}}^0 + \underline{\underline{\varepsilon}}^L \quad (2.34)$$

com

$$\underline{\varepsilon}^0 = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T \quad (2.35)$$

e

$$\underline{\varepsilon}^L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{\theta}_x^T & 0 \\ 0 & \underline{\theta}_y^T \\ \underline{\theta}_y^T & \underline{\theta}_x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\theta}_x \\ \underline{\theta}_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underline{A} \cdot \underline{\theta} \quad (2.36)$$

O gradiente de deslocamentos, $\underline{\theta}$, é definido como:

$$\begin{bmatrix} \underline{\theta}_x \\ \underline{\theta}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \underline{I}_2 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots \\ \dots & \underline{I}_2 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots \end{bmatrix} \cdot \underline{\delta} = \underline{G} \cdot \underline{\delta} \quad (2.37)$$

onde

$$\underline{\theta}_x = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T, \quad \underline{\theta}_y = \left[\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} \right]^T \quad (2.38)$$

e \underline{I}_2 a matriz identidade 2.2.

A matriz \underline{B}_1 definida em (2.14), relacionando o incremento de deformações ao de deslocamentos, se reduz a:

$$\underline{B}_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \hline \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{array} \right] \quad (2.39)$$

e a matriz \underline{M} de (2.19) a:

$$\underline{M} = \left[\begin{array}{cc|cc} \underline{I}_2 \sigma_x & \underline{I}_2 \sigma_{xy} & \underline{I}_2 \sigma_{xy} & \underline{I}_2 \sigma_y \\ \hline \underline{I}_2 \sigma_{xy} & \underline{I}_2 \sigma_y & \underline{I}_2 \sigma_x & \underline{I}_2 \sigma_{xy} \end{array} \right] \quad (2.40)$$

2.4 SÓLIDO AXISSIMÉTRICO, FORMULAÇÃO LAGRANGEANA

Para a análise de estruturas axissimétricas sujeita a carregamentos de revolução, o tensor de Green, em coordenadas cilíndricas r , z e α , é escrito como:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \left[\epsilon_r, \epsilon_z, \epsilon_{rz}, \epsilon_\alpha \right]^T = \underline{\underline{\epsilon}}^0 + \underline{\underline{\epsilon}}^L \quad (2.41)$$

onde

$$\underline{\underline{\epsilon}}^0 = \left[\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{u}{r} \right]^T \quad (2.42)$$

e

$$\underline{\underline{\epsilon}}^L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta_r^T \cdot \theta_r \\ \theta_z^T \cdot \theta_z \\ 2\theta_r^T \cdot \theta_z \\ \left(\frac{u}{r}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_r^T & 0 & 0 \\ 0 & \theta_z^T & 0 \\ \theta_z^T & \theta_r^T & 0 \\ 0 & 0 & r|u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_r \\ \theta_z \\ r|u \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\theta}} \quad (2.43)$$

sendo:

$$\underline{\theta}_r = \left[\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial r} \right]^T \quad \text{e} \quad \underline{\theta}_z = \left[\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right]^T \quad (2.44)$$

Para um nó genérico i a submatriz B_i , definida em (2.14), toma o seguinte aspecto:

$$B_i = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial r} & & \frac{\partial \bar{z}}{\partial r} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial r} & \\ \hline \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} & & \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} & \\ \hline \frac{\partial \bar{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} & + & \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial r} & \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial r} & + & \frac{\partial \bar{z}}{\partial r} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial z} & \\ \hline \left(\frac{\bar{r}}{r} \right) \cdot \frac{N_i}{r} & & 0 & \end{array} \right] \quad (2.45)$$

sendo que a matriz M é definida como:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \sigma_r \underline{\underline{I}}_2 & \sigma_{rz} \underline{\underline{I}}_2 & 0 \\ \sigma_{rz} \underline{\underline{I}}_2 & \sigma_z \underline{\underline{I}}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

2.5 ELEMENTOS IMPLEMENTADOS

Tanto para o estudo de estado plano de tensão e de formação como para a análise de sólidos de revolução, foram utilizados os elementos isoparamétricos quadráticos (5) com oito pontos nodais, como na Figura 2.1.

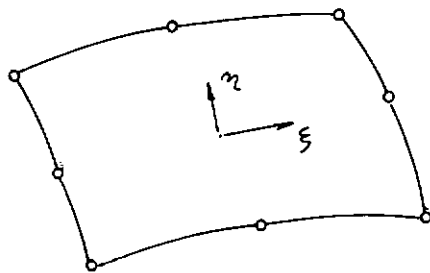


FIGURA 2.1 - Elemento isoparamétrico quadrático.

Para a análise de estruturas de superfície (casca, placas) utilizou-se elementos finitos tridimensionais degenerados de elementos isoparamétricos tridimensionais quadráticos, Figura 2.2.

O elemento é degenerado pela prescrição de variação linear de deslocamentos ao longo da espessura e supressão da energia de deformação das tensões normais ao plano da superfície média.

A geometria do elemento é descrita como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum N_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \sum N_i \frac{\xi}{2} V_{s1} \quad (2.47)$$

e o campo de deslocamentos expandido por:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum N_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ z_i \end{bmatrix} + \sum N_i \xi \frac{t_1}{2} \begin{bmatrix} v_{11}, v_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

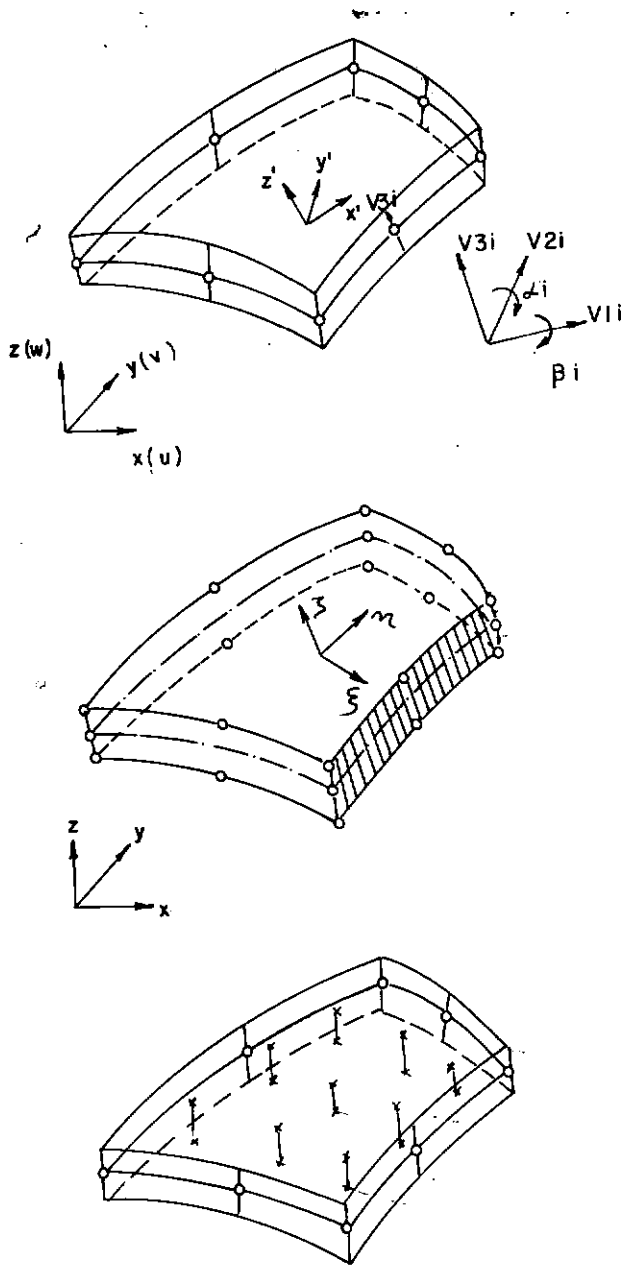


FIGURA 2.2: a) Elemento degenerado.
 b) Elemento tridimensional quadrático.
 c) Integração 3 x 3 x 2.

Este processo de especialização para superfícies delgadas e espessas é bastante difundido, e descrito em detalhes nas referências (10, 11).

CAPÍTULO III

NÃO-LINEARIDADE FÍSICA

O aspecto básico da solução de problemas de não-linearidade física é a determinação das leis constitutivas para definir as matrizes tensão-deformação na análise pelo método dos elementos finitos. Discretização com uso de elementos finitos isoparamétricos implicam na necessidade de avaliar estas matrizes nos pontos de integração do elemento. As propriedades que descrevem o comportamento de um elemento são obtidas, portanto, do estado de tensão de cada ponto de integração individualmente, permitindo um conhecimento preciso de todo o domínio do elemento.

O propósito deste capítulo é discutir a implementação de relações constitutivas específicas. Para tal, os materiais são classificados segundo Fung (12), como elástico, hiperelásticos e hipoelásticos.

3.1 ELASTICIDADE LINEAR E HIPERELASTICIDADE

Como no procedimento da análise linear elástica para deslocamentos infinitesimais as formulações Lagrangeana e Euleriana se confundem, considera-se diretamente a análise de grandes deformações.

Para a formulação Lagrangeana tem-se:

$$\sigma_{ij} = D_{ijrs} \cdot \epsilon_{rs} \quad (3.1)$$

onde σ_{ij} e ϵ_{rs} são o segundo tensor de Piola-Kirchhoff e o tensor de deformações de Green, respectivamente, e D_{ijrs} o tensor das propriedades físicas do material na configuração indeformada.

Na formulação Euleriana tem-se:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{D}_{ijrs} \cdot \bar{\epsilon}_{rs} \quad (3.2)$$

sendo $\bar{\sigma}_{ij}$ o tensor de tensões de Cauchy, $\bar{\epsilon}_{rs}$ o tensor de deformações de Almansi e \bar{D}_{ijrs} o tensor das propriedades físicas na configuração atual.

Na elasticidade linear, tanto D_{ijrs} como \bar{D}_{ijrs} são constantes e definidas em termos do módulo de elasticidade

e do coeficiente de Poisson, para materiais isotrópicos.

Para materiais hiperelásticos as relações entre tensão e deformação são derivadas da função energia de deformação, usualmente definida por unidade de massa do material e correspondente a formulação Lagrangeana.

$$\frac{d}{dt} W = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \cdot \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \quad (3.3)$$

As relações constitutivas, (3.1) e (3.2), são usadas para a avaliação das matrizes de tensão do elemento, isto é, calcula-se as tensões Piola-Kirchhoff ou Cauchy diretamente das deformações de Green ou Almansi. No cálculo das matrizes de rigidez torna-se necessário a cada iteração ou novo incremento a obtenção dos tensores tangentes das propriedades do material.

Tanto na análise de materiais elásticos como hiperelásticos, os resultados numéricos obtidos devem ser idênticos em ambas as formulações. Portanto, como as constantes do material independem da história da solução, a precisão depende somente da formulação isoparamétrica e do algoritmo de resolução do sistema de equações, uma vez que iterações são necessárias para estabelecer o equilíbrio.

3.2 HIPOELASTICIDADE

Para materiais hipoelásticos como o modelo elasto-plástico, o modelo de módulo tangente variável e o de descrição pela curva tensão-deformação do material (3), os tensores constitutivos relacionam incrementos de tensão à incrementos de deformação. Assim, tensores finais não podem ser relacionados diretamente às deformações porque dependem da história da deformação.

Considera-se inicialmente a análise de problemas de pequenos deslocamentos com apenas não-linearidade física. Neste caso, tem-se:

$$\Delta \sigma_{ij} = D_{ijrs} \cdot \Delta e_{rs} \quad (3.4)$$

onde $\Delta \sigma_{ij}$ e Δe_{rs} são incrementos de tensão e de deformações infinitesimais. Neste tipo de análise assume-se que a configuração inicial do corpo permanece inalterada. Assim, incrementos de tensão e de deformações infinitesimais podem ser simplesmente adicionados para se obter as tensões e deformações finais já que o tensor físico D_{ijrs} depende da história da tensão e da deformação.

Embora as formulações aqui discutidas são dirigidas à condição de grandes deformações, nos problemas práticos resol

vidos a lei do material é definida apenas para pequenas deformações. Um caso importante é o comportamento do modelo elasto-plástico com uso da teoria clássica da plasticidade que é aplicada na análise de grandes deslocamentos, porém, com pequenas deformações. Neste tipo de análise a configuração ou geometria do corpo é atualizada para cada iteração ou incremento de carga conforme o método de solução utilizado.

Usando a formulação Lagrangeana, o comportamento de materiais hipoeelásticos pode ser descrito como:

$$\Delta \sigma_{ij} = D_{ijrs} \cdot \Delta \epsilon_{rs} \quad (3.5)$$

onde $\Delta \sigma_{ij}$ e $\Delta \epsilon_{rs}$ são incrementos do segundo tensor de Piola-Kirchhoff e do tensor de deformação de Green, respectivamente. Para a solução aproxima-se $\Delta \epsilon_{rs}$ por Δe_{rs} - a componente linear do tensor de Green - e o cálculo do tensor de Piola-Kirchhoff no passo I+1 é dado por:

$$\sigma_{ij}^{I+1} = \sigma_{ij}^I + \Delta \sigma_{ij}^{I+1} \quad (3.6)$$

Na formulação Euleriana, tem-se:

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} = \bar{D}_{ijrs} \cdot \Delta \bar{\epsilon}_{rs} \quad (3.7)$$

sendo $\Delta \bar{\sigma}_{ij}$ e $\Delta \bar{\epsilon}_{rs}$ os incrementos do tensor de tensões de Cauchy e do tensor de deformações de Almansi. Assume-se que \bar{D}_{ijrs} é definido pela história das tensões de Cauchy e para a solução aproxima-se $\Delta \bar{\epsilon}_{rs}$ por $\Delta \bar{e}_{rs}$.

Tendo calculado $\Delta \bar{\sigma}_{ij}$ da relação

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} = \bar{D}_{ijrs} \cdot \Delta \bar{e}_{rs} \quad (3.8)$$

as tensões de Cauchy no passo $I+1$ são obtidas por:

$$\bar{\sigma}_{ij}^{I+1} = \bar{\sigma}_{ij}^I + \Delta \bar{\sigma}_{ij}^{I+1} \quad (3.9)$$

Em geral, a definição das relações constitutivas a través da formulação Euleriana é preferida, uma vez que se trabalha com componentes físicos de tensão para definir as constantes do material, equação (3.7), e Δe_{rs} pode ser entendido como o incremento de deformação plástica e elástica, exatamente como na análise de pequenos deslocamentos.

Com as várias descrições avaliadas para o comportamento do material, a dificuldade maior é a escolha de qual deve ser usada no estado de análise atual. Isto depende naturalmente do material específico considerado e da definição escolhida

para os parâmetros do material. Por exemplo, na análise elasto-plástica se a formulação Lagrangeana é usada, a tensão de escoamento é definida como função do 2º tensor de Piola-Kirchhoff, enquanto que para a formulação Euleriana o tensor de Cauchy a define.

3.2.1 O MODELO ELASTO-PLÁSTICO

O modelo elasto-plástico pode ser ilustrado em uma hipotética curva tensão-deformação para um estado uni-axial de tensão, Figura 3.1. Três características devem ser notadas; trecho elástico seguido por um escoamento e o endurecimento no regime plástico ("strain-hardening"), no qual as tensões crescem muito menos com as deformações do que no regime elástico e uma parcela de deformação, ϵ_p , permanece após o descarregamento.

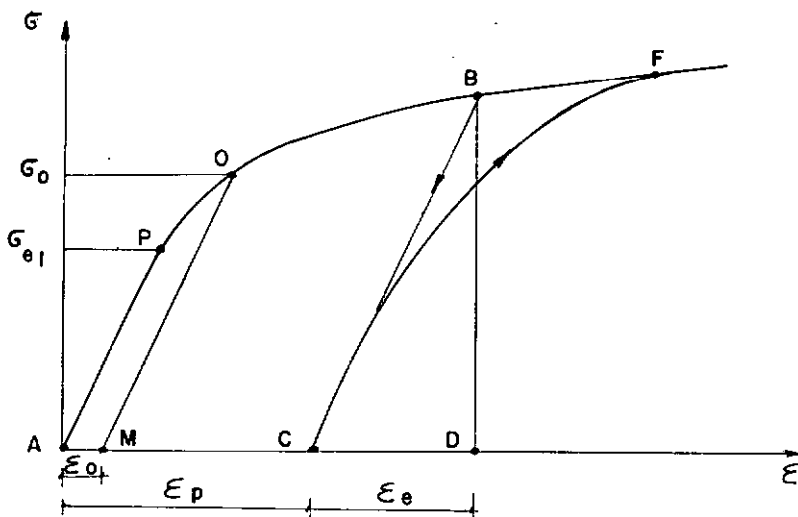


FIGURA 3.1 - Curva tensão-deformação uniaxial.

O limite de proporcionalidade P , onde se tem a última tensão do trecho linear, e o limite elástico definido como a mais alta tensão que se pode obter sem deformações permanentes, são geralmente assumidas coincidentes na idealização da teoria da plasticidade. A tensão σ_{el} é denominada tensão de escoamento, sendo que em análises práticas, onde se compara o comportamento de diversos materiais, esta tensão é usualmente definida pelo ponto O obtido a partir de uma reta paralela a inclinação inicial do trecho linear a uma distância ϵ_0 pré-estabelecida.

Para um estado complexo de tensão as condições que caracterizam a transição entre o regime elástico e plástico são dadas por funções do tipo

$$F = F(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}_p, K) = f(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}_p) - K \quad (3.10)$$

e são conhecidas como critério de plasticidade, onde $\underline{\sigma}$ representa o estado de tensão atual, $\underline{\epsilon}_p$ a deformação plástica correspondente a este estado de tensão e K uma constante do material relacionada com a tensão de escoamento. Através de uma interpretação geométrica os critérios de plasticidade definem superfícies de escoamento ("yield surface") no campo das tensões.

O comportamento após o escoamento é também caracterizado e um fenômeno conhecido como "work-hardening" ou "strain-hardening" tem lugar, ou seja, uma pequena variação nas tensões

implica em grandes variações nas deformações. Além disso, a curva tensão-deformação característica do descarregamento é diferente da do carregamento, seguindo aproximadamente uma reta paralela a inclinação original do trecho elástico ilustrado pelas linhas OM e BC da Figura 3.1. Para o descarregamento a partir do ponto B, se E denota o módulo de elasticidade do material, a deformação elástica é dado por:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_B}{E}$$

representada pelo segmento CD no eixo das deformações, enquanto que a deformação plástica ou permanente, ε_p , é representado por AC.

Se há um recarregamento a partir do ponto C, a curva tensão-deformação CF difere da do descarregamento, pois o material adquire novas propriedades elásticas, havendo um aumento do limite elástico ou na tensão de escoamento.

No estado complexo de tensão este fenômeno é caracterizado também por funções do tipo:

$$F = F(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}_p, k) = f(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}_p) - y(k) \quad (3.11)$$

onde y é uma função do parâmetro k de endurecimento do material

("strain-hardening parameter"). Estas funções representam superfícies de carregamento ("loading surfaces") no campo das tensões as quais, para um dado estado de tensão, separa as regiões de deformações elásticas das plásticas, isto é, na fronteira da superfície um incremento de carga pode produzir deformações elásticas se for um incremento de descarregamento, ou deformações plásticas se for de carregamento. O critério de plasticidade, dado pelas superfícies de escoamento, decorrem da equação (3.11), fazendo-se $y(k) = K$.

A forma e a posição das superfícies dependem, em geral, não somente do estado de tensão mas, também, da história da deformação. Além disso a superfície não é fixa, podendo se expandir ou deslocar conforme o tipo de endurecimento do material, sendo que dois comportamentos distintos devem ser analisados, isotrópico e cinemático.

O comportamento cinemático assume que durante deformações plásticas a superfície de carregamento translata como um corpo rígido no espaço das tensões, mantendo o tamanho, a forma e a orientação da superfície de escoamento. O primeiro objetivo desta teoria é dar condições para que o efeito Bauschinger seja analisado (13, 14). Este fenômeno é caracterizado pelo fato de um aumento da tensão de escoamento em uma direção resultar em um decréscimo de mesmo valor na direção reversa.

Na Figura 3.2 tem-se o comportamento cinemático

ilustrado para o estado plano de tensão em função das tensões principais σ_1 e σ_2 .

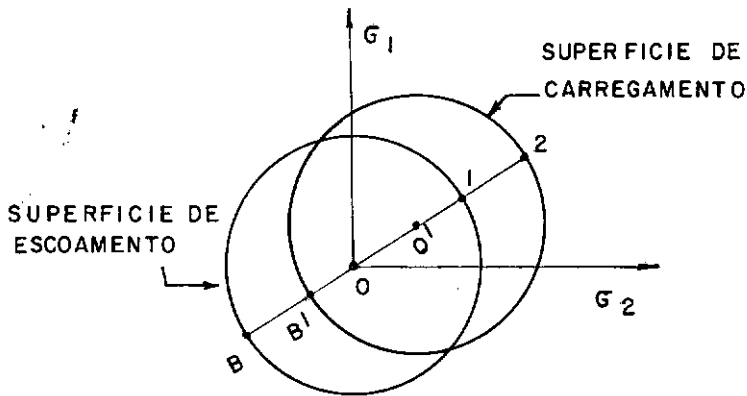


FIGURA 3.2 - Comportamento Cinemático.

As superfícies de escoamento e carregamento são mostradas para uma variação, no estado de tensão, do ponto 1 para o 2. Pode-se notar que a variação na direção 1-2 acarreta em um decréscimo do mesmo valor na direção reversa, pontos B e B'.

No comportamento isotrópico assume-se que a superfície se expande uniformemente em torno da origem, mantendo a mesma forma e orientação da superfície de escoamento. Para um estado plano de tensão a figura 3.3 ilustra o comportamento isotrópico, mostrando as superfícies de escoamento e carregamento para uma variação de tensão do ponto 1 para o 2. O descarregamento e um carregamento subsequente na direção reversa, resulta no escoamento do material para um estado de tensão representado pelo ponto 3, sendo que o caminho 2-3 será elástico.

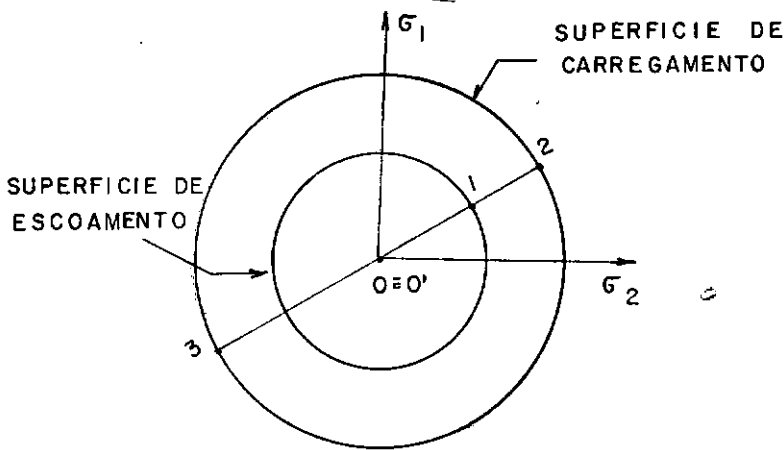


FIGURA 3.3 - Comportamento Isotrópico.

Para a representação isotrópica o efeito Bauschinger não pode ser analisado. De fato, esta teoria surge da consideração de que no processo de endurecimento do material, trecho OBF da Figura 3.1, qualquer aumento na tensão de escoamento resulta em um aumento do mesmo valor na direção reversa.

3.2.1.1 Relações Constitutivas

Se a condição de plasticidade é atingida, isto é,

$$F(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}_p, k) = 0 \quad (3.12)$$

deformações plásticas ocorrem e o incremento de deformação atual é dado por:

$$d\tilde{\underline{\epsilon}} = d\tilde{\underline{\epsilon}}_e + d\tilde{\underline{\epsilon}}_p \quad (3.13)$$

Para as deformações elásticas tem-se:

$$d\tilde{\underline{\epsilon}}_e = \tilde{\underline{D}}^{-1} \cdot d\tilde{\underline{\sigma}} \quad (3.14)$$

onde $\tilde{\underline{D}}$ é a matriz das constantes elásticas do material.

Para as deformações plásticas as relações constitutivas são baseadas no trabalho plástico máximo,

$$(\tilde{\underline{\sigma}} - \tilde{\underline{\sigma}}^0) d\tilde{\underline{\epsilon}}_p \geq 0 \quad (3.15)$$

onde $d\tilde{\underline{\epsilon}}_p$ representa as componentes do incremento de deformações plásticas resultante do estado de tensão $\tilde{\underline{\sigma}}$ na superfície de escoamento subsequente, e $\tilde{\underline{\sigma}}^0$ o estado de tensão na superfície anterior (15). Para garantir a condição de convexidade na superfície de carregamento, a inequação leva à condição de normalidade associada ao incremento de deformações plásticas. Assim o incremento é dado por:

$$d\tilde{\underline{\epsilon}}_p = d\lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \tilde{\underline{\sigma}}} \quad (3.16)$$

onde $\frac{\partial F}{\partial \tilde{\underline{\sigma}}}$ é o vetor definido para cada estado de tensão, enquanto

$d\lambda$ é uma constante a ser determinada.

No regime plástico, $F = 0$ e, portanto,

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\}^T \cdot d\underline{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial k} \cdot dk + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\varepsilon}_p} \right\}^T \cdot d\underline{\varepsilon}_p = 0 \quad (3.17)$$

Definindo-se:

$$\underline{a} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \quad \text{e} \quad A = - \frac{1}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial k} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \underline{\varepsilon}_p} \right\}^T \cdot d\underline{\varepsilon}_p \right) \quad (3.18)$$

a equação (3.17) pode ser escrita como:

$$\underline{a}^T \cdot d\underline{\sigma} - A \cdot d\lambda = 0 \quad (3.19)$$

e o incremento de deformação:

$$d\underline{\varepsilon} = \underline{D}^{-1} \cdot d\underline{\sigma} + d\lambda \cdot \underline{a} \quad (3.20)$$

Após a eliminação de $d\underline{\sigma}$ através da equação (3.19) e da pré-multiplicação em ambos os lados da equação (3.20) por $\underline{a}^T \cdot \underline{D}$ chega-se a:

$$\underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot d\underline{\varepsilon} = A d\lambda + d\lambda \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a} \quad (3.21)$$

obtendo-se, conseqüentemente, a constante $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{1}{A + \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}} \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot d\underline{\varepsilon} \quad (3.22)$$

que substituída em (3.20) leva finalmente a:

$$d\underline{\sigma} = (\underline{D} - \underline{D}_p) d\underline{\varepsilon} \quad (3.23)$$

onde:

$$\underline{D}_p = \frac{1}{A + \underline{a}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{a}} \cdot \underline{D} \cdot \underline{a} \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{D} \quad (3.24)$$

É conveniente expressar as superfícies de escoamento como função de três invariantes de tensões dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{J_1}{3} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ \bar{\sigma} &= J_2^{1/2} = \frac{1}{2} \left[(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2 \right]^{1/2} \\ \phi &= \frac{1}{3} \sin^{-1} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\bar{\sigma}^3} \right] \quad \text{para} \quad -\frac{1}{6}\pi \leq \phi \leq \frac{1}{6}\pi \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde

$$J_3 = S_x \cdot S_y \cdot S_z + 2 \sigma_{xy} \cdot \sigma_{yz} \cdot \sigma_{xz} - S_x \cdot \sigma_{yz}^2 - S_y \cdot \sigma_{xz}^2 - S_z \cdot \sigma_{xy}^2 \quad (3.26)$$

e

$$S_x = \sigma_x - \sigma_m$$

$$S_y = \sigma_y - \sigma_m$$

$$S_z = \sigma_z - \sigma_m$$

As superfícies de escoamento para os vários critérios de plasticidade podem ser dados como:

1. TRESCA

$$F = 2 \cdot \bar{\sigma} \cdot \cos\phi - y(k) = 0 \quad (3.27)$$

2. HUBER-MISES

$$F = \sqrt{3} \cdot \bar{\sigma} - y(k) = 0 \quad (3.28)$$

3. MOHR-COULOMB

$$F = \sigma_m \cdot \sin\theta + \bar{\sigma} \cos\phi - \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \sin\phi \cdot \sin\theta - c \cdot \cos\theta = 0 \quad (3.29)$$

4. DRUCKER-PRAGER

$$F = 3 \alpha' \cdot \sigma_m + \bar{\sigma} - \beta = 0 \quad (3.30)$$

sendo

$$\alpha = \frac{2 \sin\theta}{\sqrt{3} \cdot (3 - \sin\theta)} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{6c \cos\theta}{\sqrt{3} \cdot (3 - \sin\theta)} \quad (3.31)$$

As superfícies definidas em 1 e 2 são geralmente aplicadas na análise de metais sendo que para solos, concreto e outros, o critério de Mohr-Coulomb e sua aproximação dada por Drucker e Prager são frequentemente usados onde C e θ são a coesão e o ângulo de atrito, respectivamente.

Desta forma o vetor gradiente $\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}}$ é escrito:

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.32)$$

Além disso da equação (3.25) pode-se obter:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \underline{\sigma}} = - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\phi} \cdot \left[\frac{1}{\bar{\sigma}^3} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \underline{\sigma}} - \frac{3 J_3}{\bar{\sigma}^4} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} \right] \quad (3.33)$$

e expressar o vetor gradiente por:

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = C_1 \cdot \frac{\partial \sigma_m}{\partial \underline{\sigma}} + C_2 \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} + C_3 \cdot \frac{J_3}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.34)$$

onde

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{1}{2\bar{\sigma}} \cdot \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2 \sigma_{yz} \\ 2 \sigma_{xz} \\ 2 \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

e,

$$\frac{\partial J_3}{\partial \underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} S_z \cdot S_y - \sigma_{yz}^2 \\ S_x \cdot S_z - \sigma_{xz}^2 \\ S_x \cdot S_y - \sigma_{xy}^2 \\ 2(\sigma_{xz} \cdot \sigma_{xy} - S_x \cdot \sigma_{yz}) \\ 2(\sigma_{xy} \cdot \sigma_{yz} - S_y \cdot \sigma_{xz}) \\ 2(\sigma_{yz} \cdot \sigma_{xz} - S_z \cdot \sigma_{xy}) \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \frac{-2}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

As constantes C_1 , C_2 e C_3 para os quatro critérios são dados na Tabela (3.1).

Na presente análise somente o comportamento isotrópico foi incorporado, sendo que o cinemático poderia sê-lo com as recomendações da referência (6, 16).

TABELA 3.1 - Constantes C_1 , C_2 , C_3 .

CRITÉRIOS DE PLASTICIDADE	C_1	C_2	C_3
TRESCA	0	$2 \cos \phi (1 + \operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} 3 \phi)$	$\frac{\sqrt{3}}{\bar{\sigma}^2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \phi}{\cos 3 \phi}$
HUBER-MISES	0	$\sqrt{3}$	0
MOHR-COULOMB	$\operatorname{sen} \theta$	$\cos \phi \left[1 + \operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} 3 \phi + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{3}} \cdot (\operatorname{tg} 3 \phi - \operatorname{tg} \phi) \right]$	$\frac{\sqrt{3} [3 - \operatorname{sen} \phi + \sqrt{3} \cos \phi \operatorname{sen} \theta]}{6 \bar{\sigma}^2 \cdot \cos 3 \phi}$
DRUCKER-PRAGER	3α	1.0	0

Para o comportamento isotrópico, onde se assume uma expansão uniforme da superfície de escoamento, as superfícies subsequentes são escritas:

$$F = f(\sigma) - y(k) = 0 \quad (3.38)$$

no qual k depende da história das deformações plásticas e é de finido como:

$$dk = \underline{\sigma}^T \cdot d\underline{\epsilon}_p \quad (3.39)$$

Assim, da equação (3.18), tem-se:

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial k} dk \right) = \frac{1}{d\lambda} \frac{dy}{dk} \cdot dk = \frac{1}{d\lambda} \cdot H \cdot \frac{d\epsilon_u^p}{dk} \cdot dk \quad (3.40)$$

onde H é a inclinação da curva que relaciona a tensão uniaxial y a sua deformação correspondente ϵ_u^p .

Tem-se, portanto, através das equações (3.39) e (3.16), para uma lei associativa:

$$dk = V \cdot d\epsilon_u^p = \underline{\sigma}^T \cdot d\underline{\epsilon}_p = d\underline{\epsilon}_p \cdot \underline{\sigma}^T = d\lambda \cdot \underline{a}^T \cdot \underline{\sigma} \quad (3.41)$$

Usando o teorema de Euler, aplicável a todas as funções homogêneas $f(\sigma)$ de primeira ordem, pode-se escrever:

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot \underline{\sigma} = f(\sigma) = y \quad (3.42)$$

e, por substituição nas equações (3.41) e (3.42), tem-se finalmente:

$$d\lambda = d\epsilon_u^p \quad e \quad A = H \quad (3.43)$$

3.2.1.2 Cálculo das Tensões Elasto-Plásticas

Durante uma iteração ou incremento de carga, quando um ponto de integração atinge a condição de plasticidade, isto é, $F(\sigma) \geq 0$, passando, portanto, do regime elástico para o plástico um fator r que separa a parcela elástica da plástica deve ser avaliado.

Se $\underline{\sigma}_0$ denota as condições elásticas iniciais, $\Delta \underline{\epsilon}$ é o incremento de deformação correspondente a variação das tensões elásticas,

$$\Delta \underline{\sigma}_e = \underline{D} \cdot \Delta \underline{\epsilon} \quad (3.44)$$

e o estudo das funções de escoamento nos leva a:

$$F(\underline{\sigma}_0) = F_0 < 0 \quad (3.45)$$

e

$$F(\underline{\sigma}_0 + \Delta \underline{\sigma}_e) = F_1 > 0 \quad (3.45)$$

se o ponto de integração se plastifica durante este incremento ou iteração.

Deve-se calcular então um fator r tal que:

$$F(\underline{\sigma}_0 + r \cdot \Delta \underline{\sigma}_e) = 0 \quad (3.46)$$

Por uma interpolação linear uma primeira aproximação, r_1 pode ser obtida:

$$r_1 = - \frac{F_0}{F_1 - F_0} \quad (3.47)$$

Entretanto, devido a não-linearidade das funções F teremos:

$$F(\underline{\sigma}_0 + \underline{r}_1 \cdot \Delta \underline{\sigma}_e) = F_2 \neq 0 \quad (3.49)$$

Uma melhor estimativa pode ser obtida se notarmos que para uma posição instantânea da superfície de escoamento, isto é, para \underline{x}_p e k constantes, podemos escrever, da equação (3.17)

$$d\underline{F} = \underline{a}^T \cdot d\underline{\sigma} \quad (3.50)$$

Considerando

$$d\underline{\sigma} = \Delta \underline{r}_1 \cdot \Delta \underline{\sigma}_e \quad (3.51)$$

e para pequenas variações.

$$dF = - F_2 \quad (3.52)$$

tem-se então:

$$F_2 = - \underline{a}^T \cdot \Delta \underline{\sigma}_e \cdot \Delta \underline{r}_1 \quad (3.53)$$

e uma melhor aproximação para \underline{r} é obtida de

$$\underline{r} = \underline{r}_1 - \frac{F_2}{\underline{a}^T \cdot \Delta \underline{\sigma}_e} \quad (3.54)$$

As tensões elásticas podem ser calculadas a partir de:

$$\Delta \underline{\sigma}_e = \int_0^{r\Delta \epsilon} \underline{D} \cdot d\underline{\epsilon} = \underline{D} \cdot r \cdot \Delta \underline{\epsilon} \quad (3.55)$$

e a parcela elasto-plástica por:

$$\Delta \underline{\sigma}_p = \int_{r\Delta \epsilon}^{\Delta \epsilon} \underline{D}_p \cdot d\underline{\epsilon} \quad (3.56)$$

Uma simples aproximação da equação (3.56) pode ser obtida escrevendo:

$$\Delta \underline{\sigma}_p = (1-r) \cdot \underline{D}_p \cdot \Delta \underline{\epsilon} \quad (3.57)$$

Para melhor avaliação da parcela elasto-plástica o incremento de deformação $(1-r) \cdot \Delta \epsilon$, é dividido em n pequenos intervalos sendo que em cada um deles a equação (3.57) é aplicada e a matriz \underline{D}_p calculada para cada intervalo. O parâmetro n é calculado relacionando o primeiro valor da função de escoamento F_1 , com uma parcela (5 a 10%) da tensão de escoamento $y(k)$.

A solução aproximada, através da equação (3.57), da

expressão exata para o cálculo da tensão elasto-plástica $\Delta\sigma_p$, conduz geralmente a valores de tensões $\underline{\sigma}_1$ tais que:

$$F(\underline{\sigma}_1) = F(\underline{\sigma}_0 + \Delta\underline{\sigma}) = F_3 \neq 0 \quad (3.58)$$

Para evitar este pequeno erro e que ele se acumule, uma correção atualizando as tensões para a superfície de escoamento correta deverá ser feita.

Se a parcela de correção é dada por:

$$\delta\underline{\sigma} = \underline{a} \cdot p \quad (3.59)$$

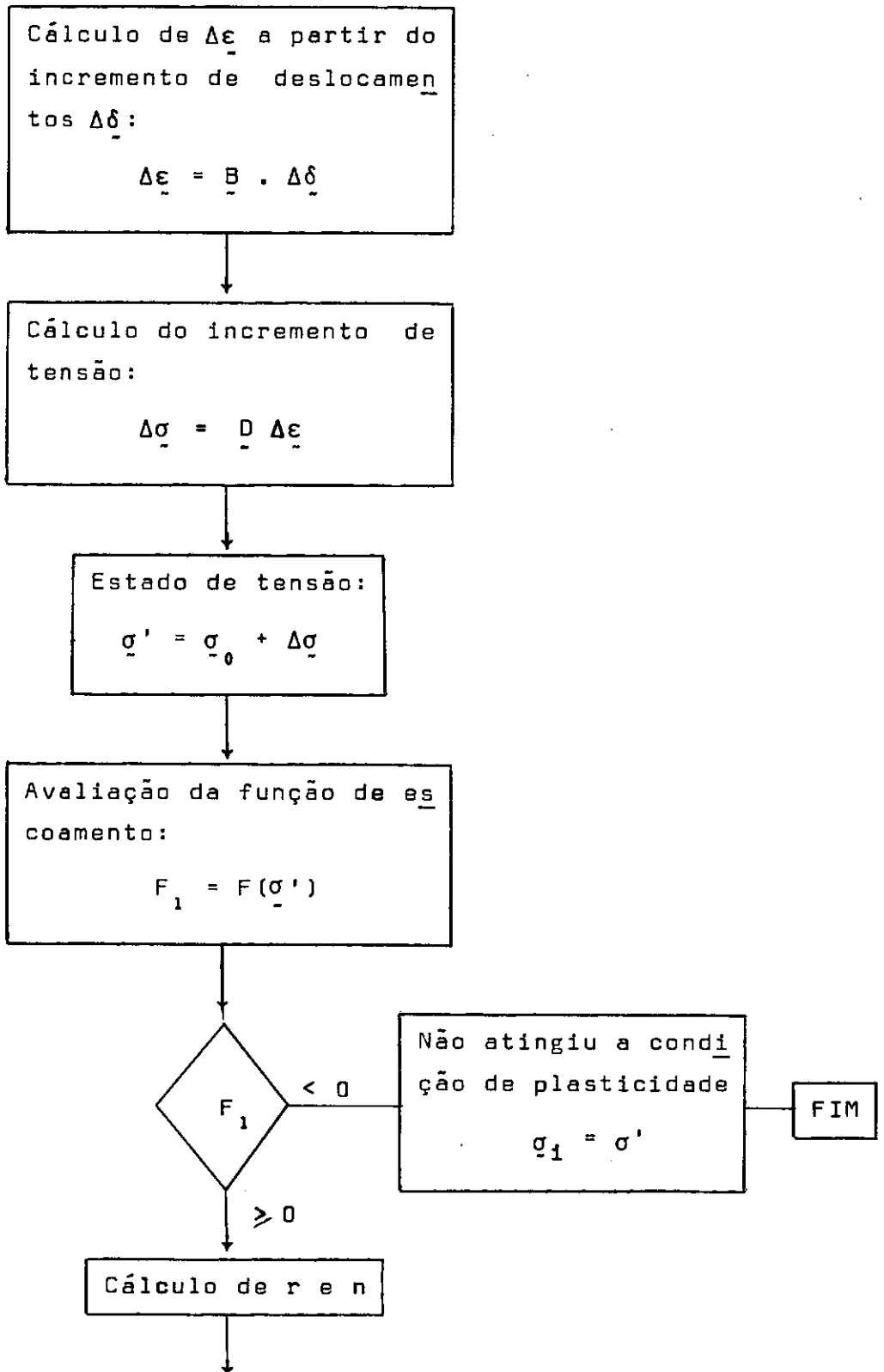
onde p é um escalar e como

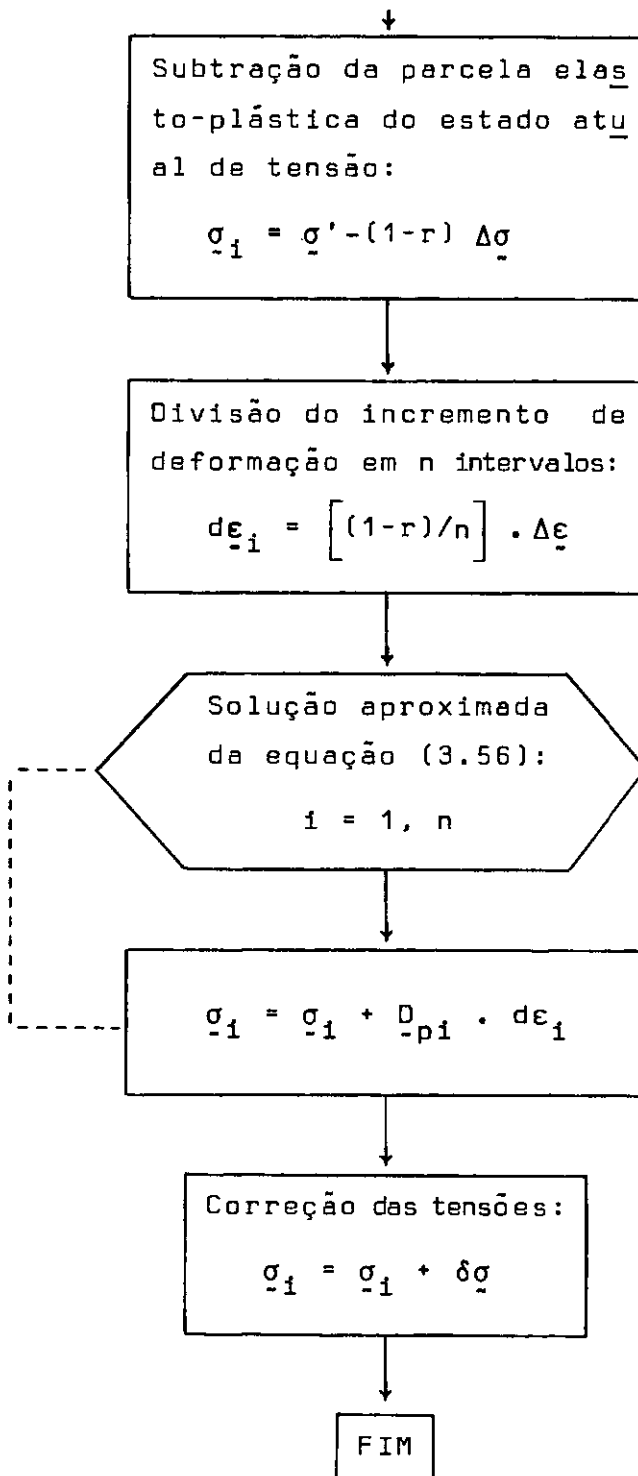
$$dF = -F_3 = \underline{a}^T \cdot \delta\underline{\sigma} = \underline{a}^T \cdot \underline{a} \cdot p \quad (3.60)$$

tem-se:

$$\delta\sigma = -\underline{a} \cdot \left(\frac{F_3}{\underline{a}^T \cdot \underline{a}} \right) \quad (3.61)$$

O cálculo das tensões se faz então, através do seguinte algoritmo:





3.2.2 OUTROS MODELOS

O modelo de módulo tangente variável é desenvolvido para a análise de materiais geológicos e é apresentado na referência (3). O modelo descreve uma lei isotrópica para o material hipoeelástico nos quais os módulos de elasticidade transversal e longitudinal são funções das invariantes de tensão e de formação.

O modelo de descrição pela curva tensão-deformação uniaxial define incrementalmente a curva característica do material (3). O modelo define os módulos de elasticidade longitudinal e transversal instantâneos como uma função linear por trechos da deformação volumétrica atual.

Os procedimentos para a solução em ambos os modelos são essencialmente idênticos. A diferença entre eles está na definição dos módulos de elasticidade e nos critérios de carregamento e descarregamento.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS DE ANÁLISE

Neste capítulo procura-se estabelecer algumas comparações dos resultados obtidos através da implementação dos procedimentos discutidos anteriormente.

Na análise dos dois primeiros problemas, algumas soluções são comparadas com as obtidas de outras formulações. No terceiro, os resultados da análise de uma casca esférica através de elementos tridimensionais são confrontados com os de elementos isoparamétricos de sólidos de revolução, utilizados unicamente para suprir a falta de soluções do tipo de estrutura que se propõe estudar. No último problema, algumas das soluções são comparadas com resultados experimentais disponíveis.

4.1 CASCA ESFÉRICA

Como primeira aplicação, analisou-se o comportamento não linear geométrico de uma casca esférica engastada, submetida a ação de uma carga concentrada axial. A análise foi efetuada com uso de 10 elementos isoparamétricos quadráticos de sólidos de revolução com integração 2×2 . A solução do sistema de equações seguiu o método incremental iterativo, com incrementos de 5 lbs. O critério de convergência utilizado foi o de deslocamentos com uso da norma absoluta ($\leq 0,01\%$).

Detalhes geométricos e as propriedades físicas do material encontram-se na Figura 4.1. A curva carga por deflexão central comparada com as soluções obtidas por Zienkiewics (2) e Haisler (17) é apresentada na Figura 4.2, onde se pode notar o alto grau de não-linearidade do problema e o comportamento estável da solução. Uma comparação entre as tensões Piola-Kirchhoff e as reais na seção central da casca é feita na Tabela 4.1.

As soluções lineares e não-lineares são confrontadas para $P = 100$ lbs através dos diagramas das deflexões e dos momentos M_x ao longo do raio nas Figuras 4.3 e 4.4, respectivamente.

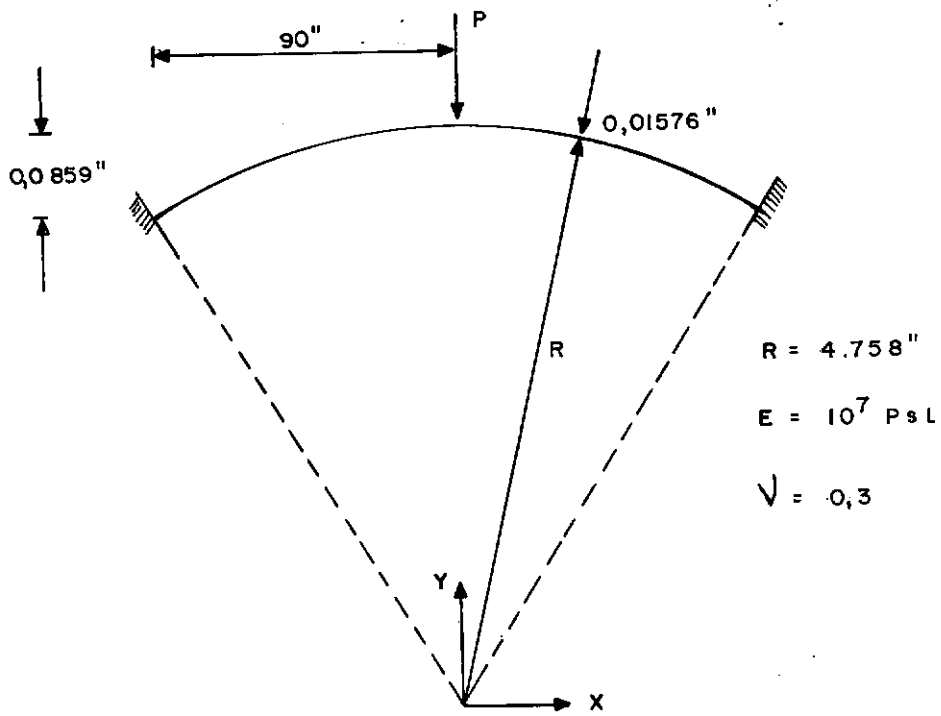


FIGURA 4.1 - Características físicas e geométricas.

TABELA 4.1 - Tensões Piola-Kirchhoff e Real

		PIOLA-KIRCHHOFF 10^5 psi	REAL 10^5 psi
σ_x	sup.	1,741	1,942
	med.	1,501	1,768
	inf.	8,575	9,535
σ_y	sup.	2,902	2,95
	med.	-1,239	-1,197
	inf.	1,883	1,732

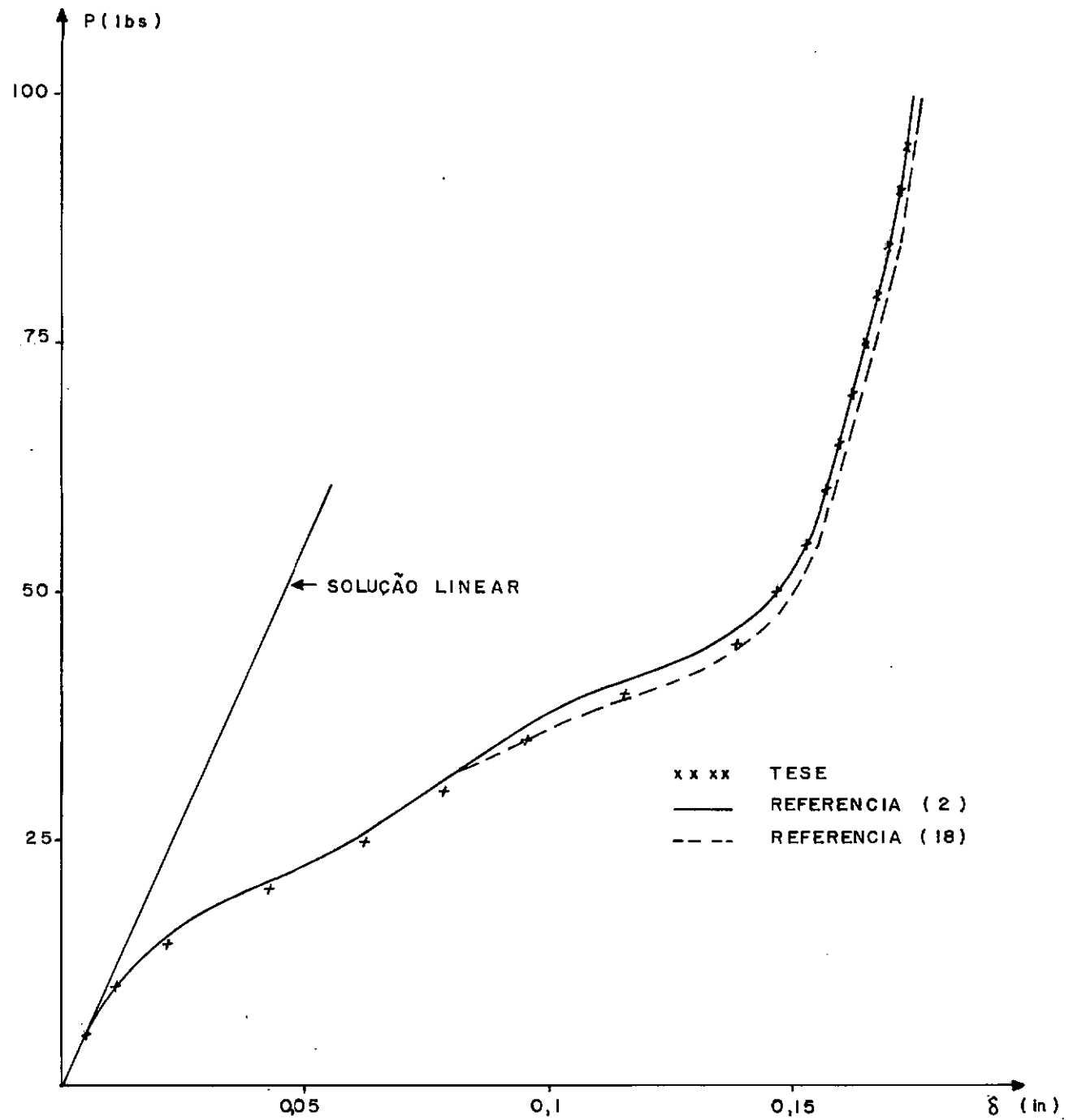


FIGURA 4.2 - Curva carga por deflexão central.

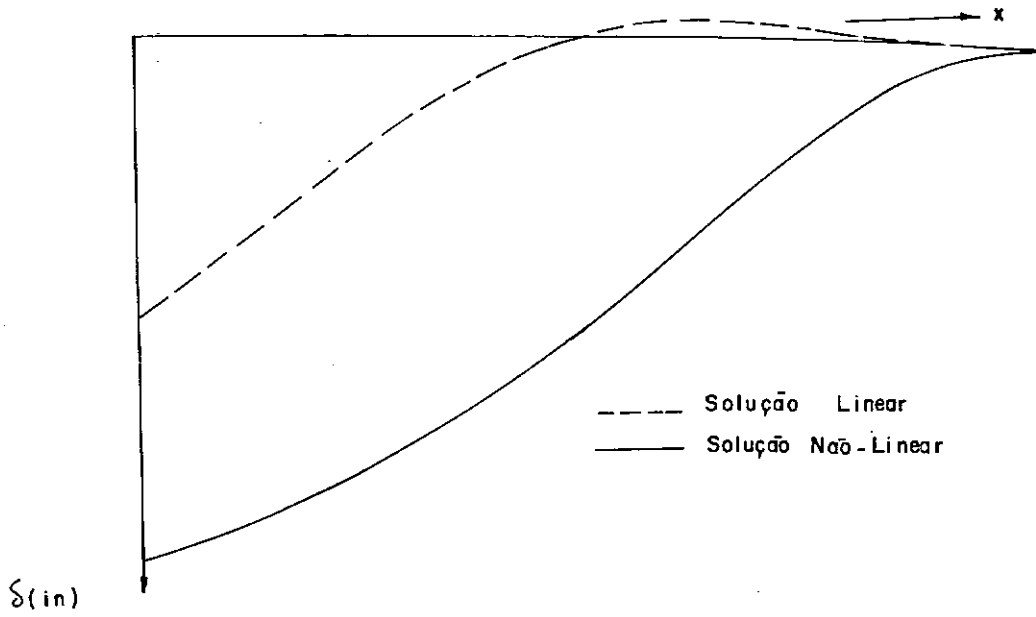


FIGURA 4.3 - Deflexões ao longo do raio para $P = 100$ lbs

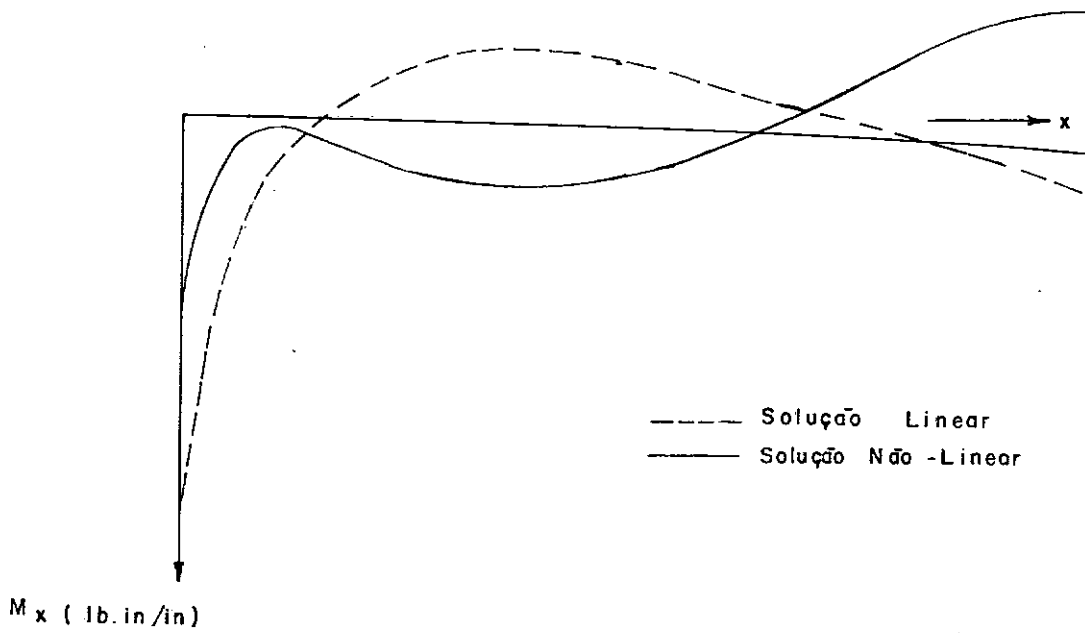


FIGURA 4.4 - Diagrama de Momentos M_x para $P = 100$ lbs

4.2 CILINDRO SUJEITO A PRESSÃO INTERNA

Para a análise não-linear física estudou-se inicialmente um cilindro sujeito a pressão interna. O modelo elasto-plástico foi considerado perfeito, sendo a tensão de escoamento ou limite igual a 10.000 psi. As características geométricas, a discretização e as propriedades físicas do material encontram-se na Figura (4.5). O comportamento elasto-plástico foi analisado com uso de três elementos isoparamétricos de sólidos de revolução com integração 2×2 e 5×5 , não existindo porém diferença significativa entre as duas análises.

Primeiramente comparou-se os resultados obtidos com os apresentados por Zienkiewics e Nayak nas referências (2) e (6). O algoritmo de solução do sistema de equações seguiu o modelo incremental-iterativo com incrementos de 1.000 psi. Para o estudo da convergência utilizou-se do critério de deslocamentos, através da norma absoluta ($\leq 0,01\%$). Na Figura (4.6) a curva carga por deslocamento dos pontos externos do cilindro é apresentada. A análise é feita segundo dois critérios de plasticidade, o de Huber-Mises e o de Tresca. Nas Figuras (4.7a), (4.7b) e (4.7c), compara-se os valores das tensões σ_θ , σ_r , σ_z para os dois critérios de plasticidade. Finalmente na Figura (4.8), tem-se os pontos de integração plastificados segundo estes dois critérios.

A segunda parte da análise tem como objetivo a comparação entre os vários critérios de plasticidade implementados. Para isto utilizou-se de um modelo incremental, com incrementos de 1.000 psi e integração 2 x 2. Na Figura (4.9) a curva carga por deslocamento dos pontos externos é apresentada. As tensões σ_θ , σ_r , σ_z para uma razão $P/Y = 0,65$ são plotadas nas Figuras (4.10a), (4.10b) e (4.10c).

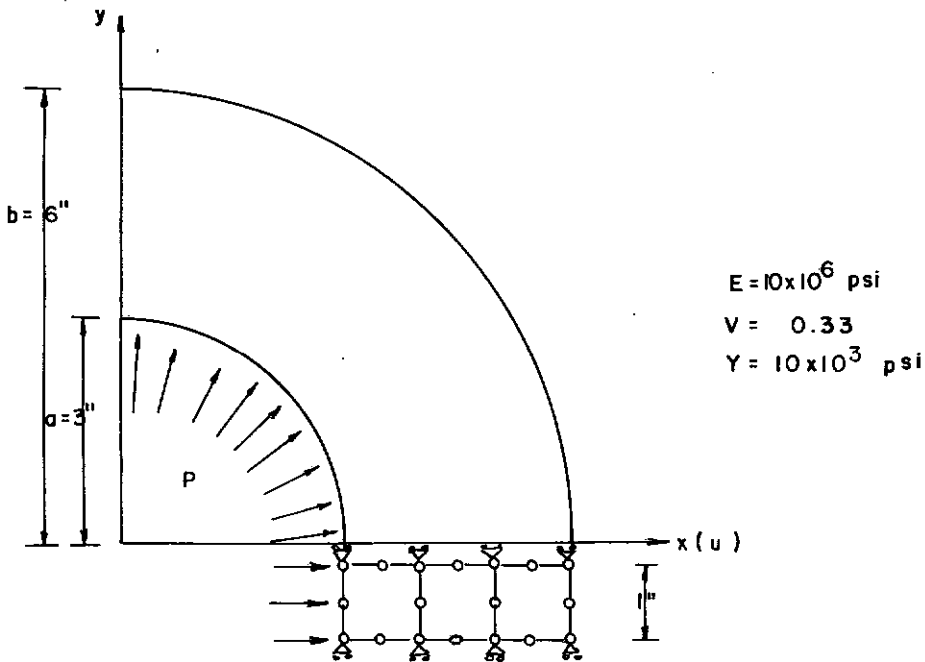


FIGURA 4.5 - Características físicas e geométricas, e discretização.

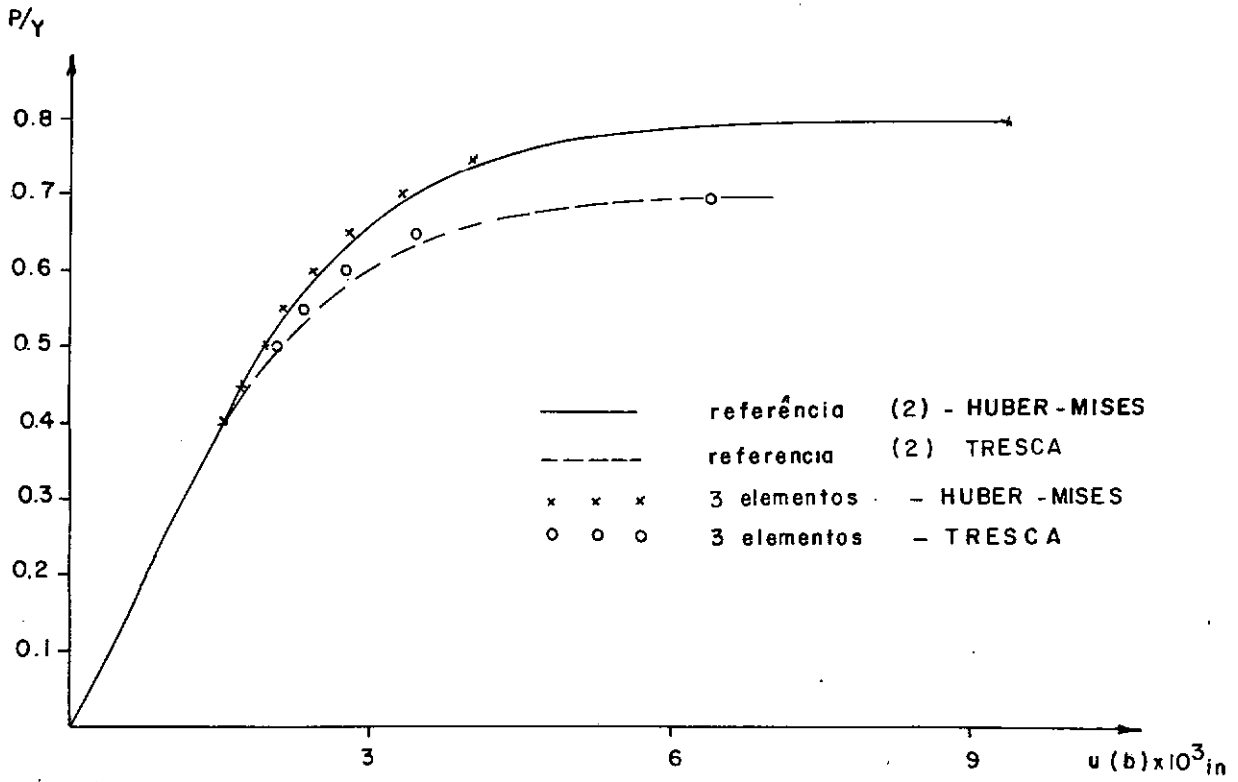


FIGURA 4.6 - Curva carga por deslocamentos externos.
Modelo incremental-iterativo.

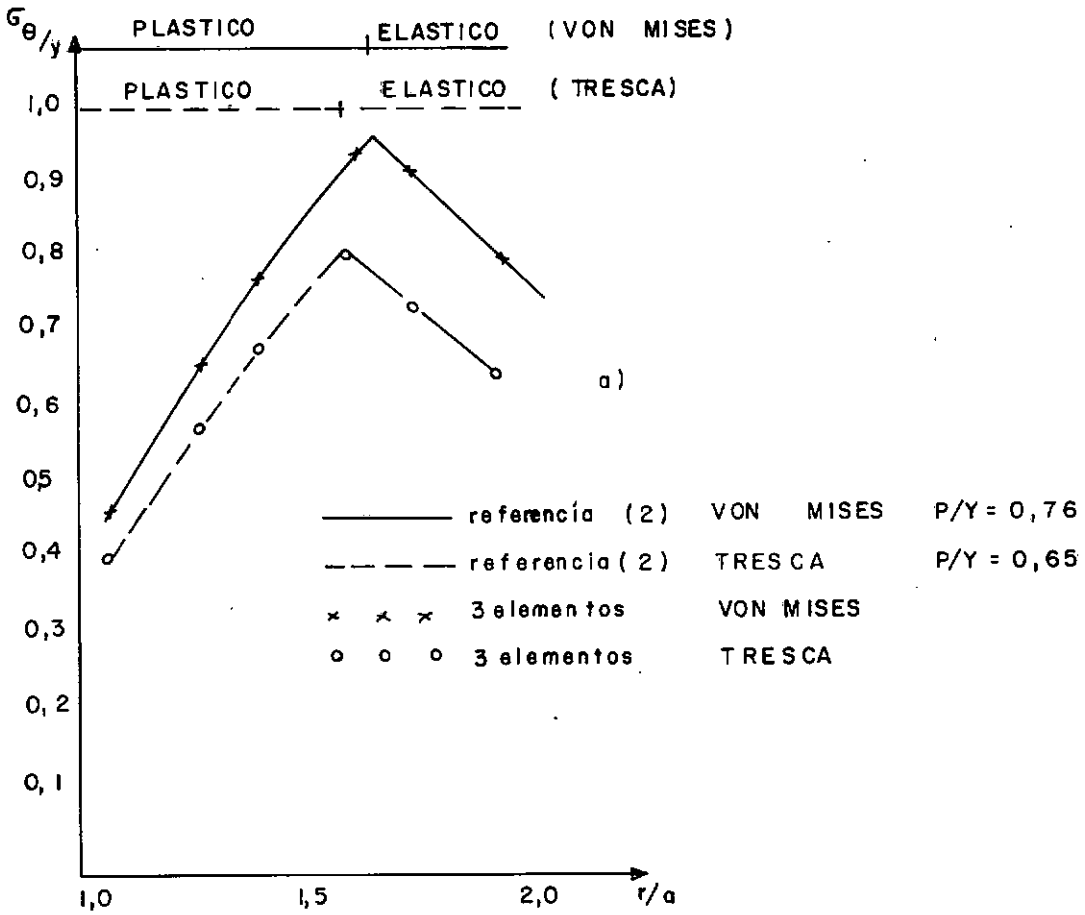


FIGURA 4.7a - Distribuição das tensões σ_{θ}

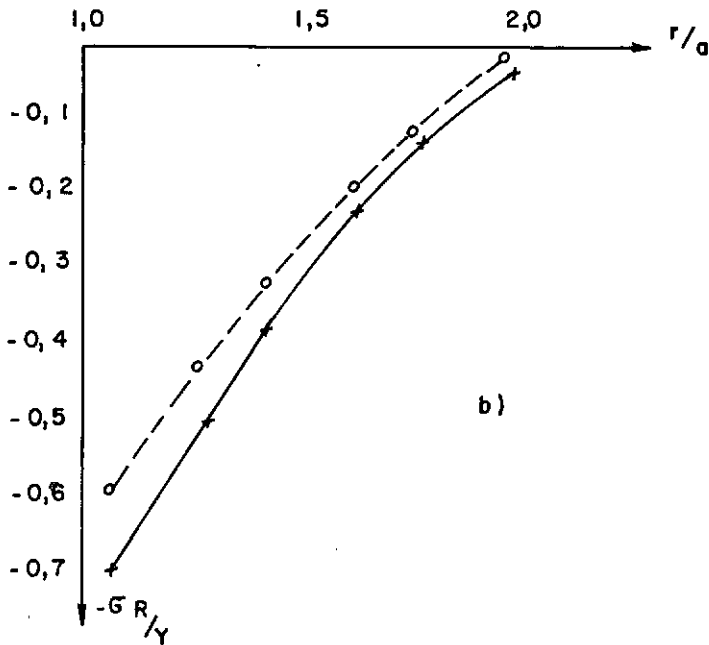


FIGURA 4.7b - Distribuição das tensões σ_r

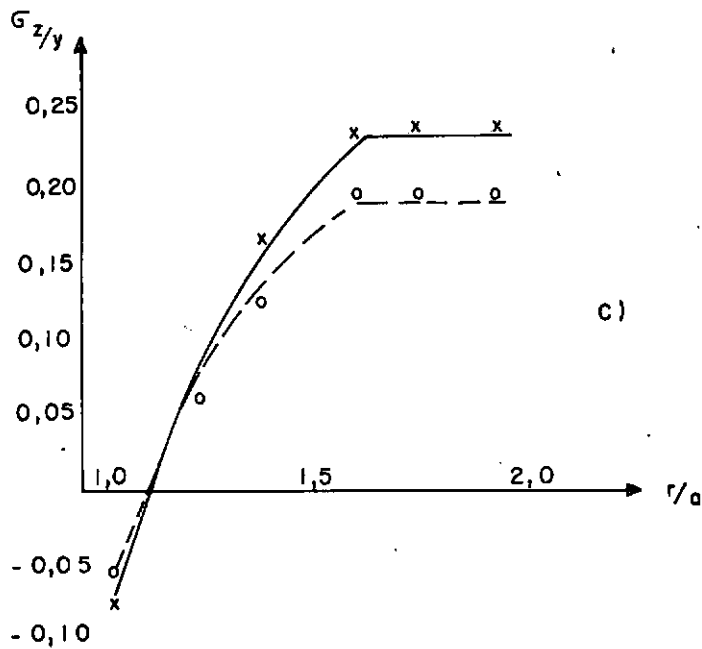
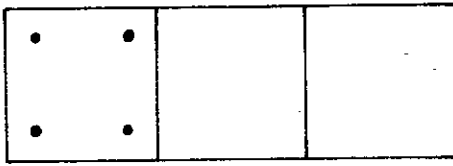
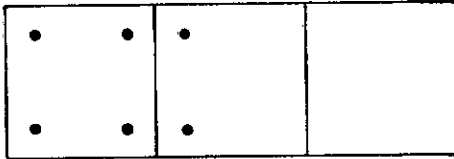


FIGURA 4.7c - Distribuição das tensões σ_z

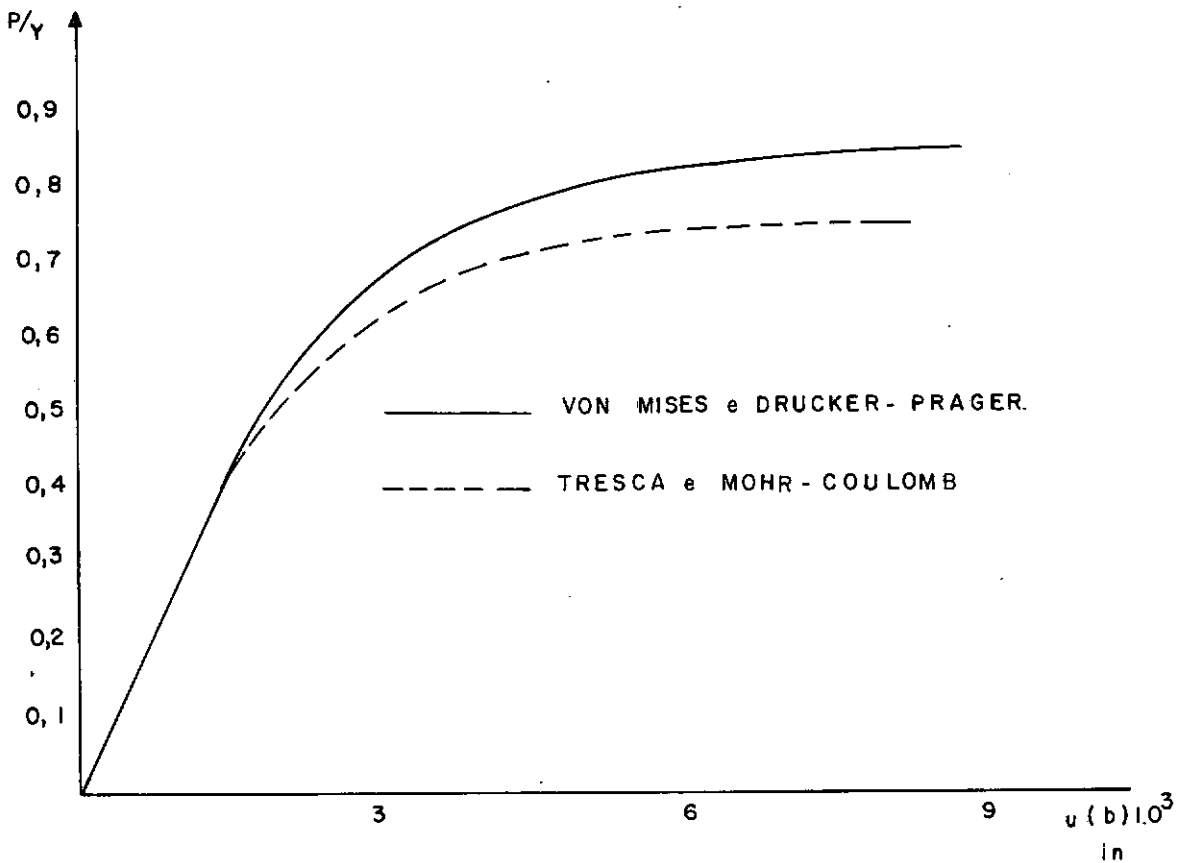


a) Von Mises



b) Tresca

FIGURA 4.8 - Pontos de integração plastificados.

FIGURA 4.9 - Curva carga por deslocamentos externos.
Modelo incremental.

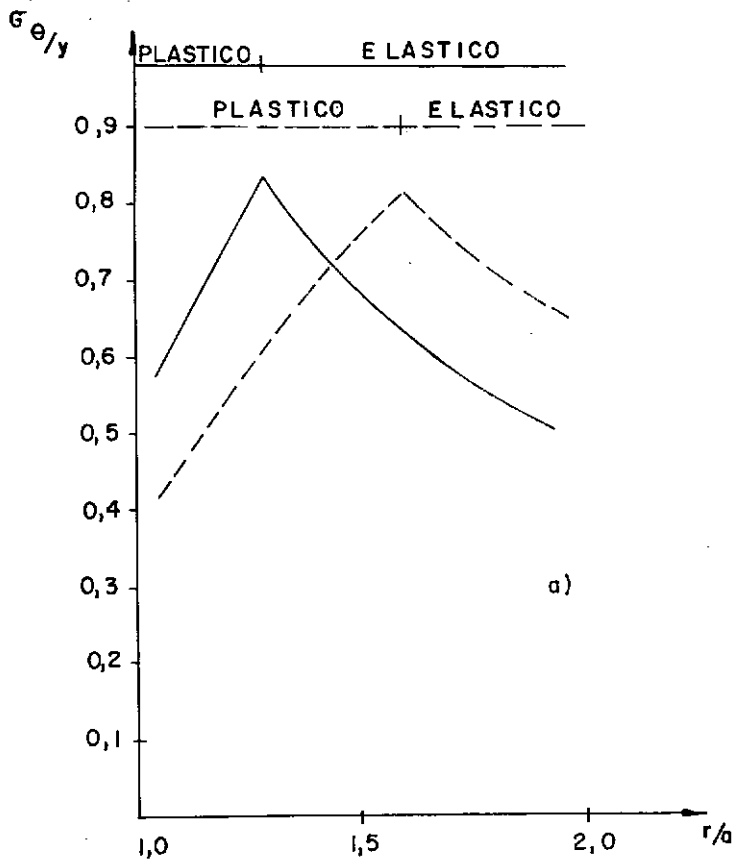


FIGURA 4.10a - Distribuição das tensões σ_{θ} , $p/Y = 0,65$

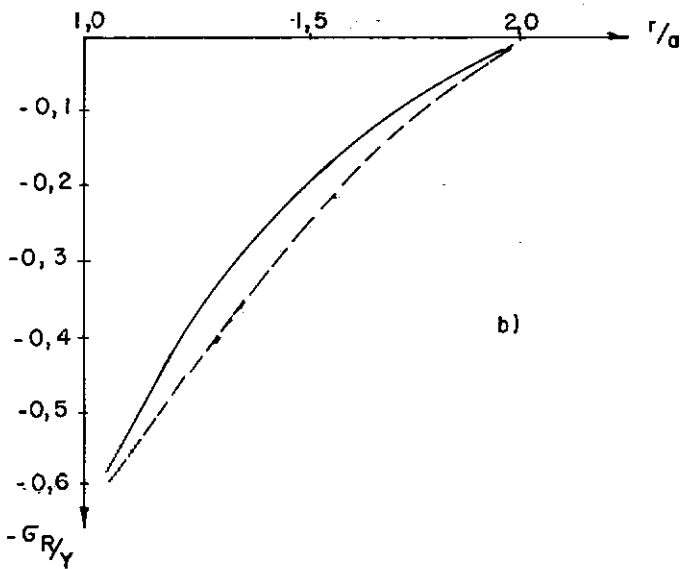


FIGURA 4.10b - Distribuição das tensões σ_r , $p/Y = 0,65$

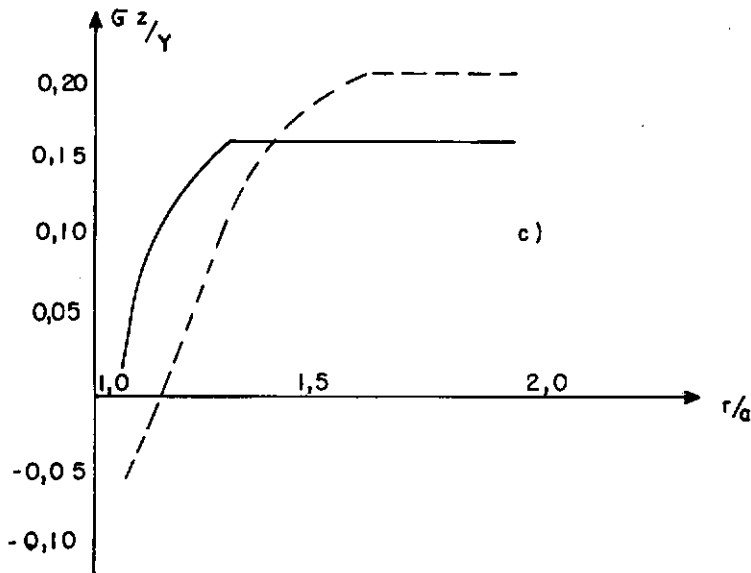


FIGURA 4.10c - Distribuição das tensões σ_z , $p/Y = 0,65$

4.3 CASCA ESFÉRICA COM CARREGAMENTO DISTRIBUÍDO UNIFORMEMENTE

O comportamento não-linear físico de uma casca esférica engastada sob a ação de carga uniformemente distribuída radial é analisada utilizando-se elementos finitos degenerados especializados para estruturas de superfície. Na tentativa de avaliar o comportamento deste elemento, a análise foi efetuada também com uso de elementos finitos isoparamétricos de sólidos de revolução, permitindo assim uma comparação apurada dos resultados obtidos.

As características geométricas estão descritas na Figura (4.11) e os diagramas característicos das propriedades físicas do material encontram-se na Figura (4.12), onde considerou-se o comportamento elasto-plástico perfeito ($A=0$) e com "strain hardening" ($A=0.1E$). Utilizando-se da solução incremental, a carga distribuída foi aplicada em incrementos de 2,5 psi até atingir 57,5 psi. O critério de plasticidade considerado foi o de Huber-Mises.

As curvas de deflexões máximas para o material elasto-plástico perfeito e com "hardening" se encontram na Figura (4.13), onde se pode notar a boa concordância entre os resultados obtidos pelas duas análises.

Através de diagramas de deformada, Figura (4.14), compara-se as soluções elástica e elasto-plástica perfeita para os dois tipos de análise com $p = 57,5$ psi.

Por fim, uma esquematização dos pontos de integração plastificados é mostrada na Figura (4.15) para $p = 57,5$ psi.

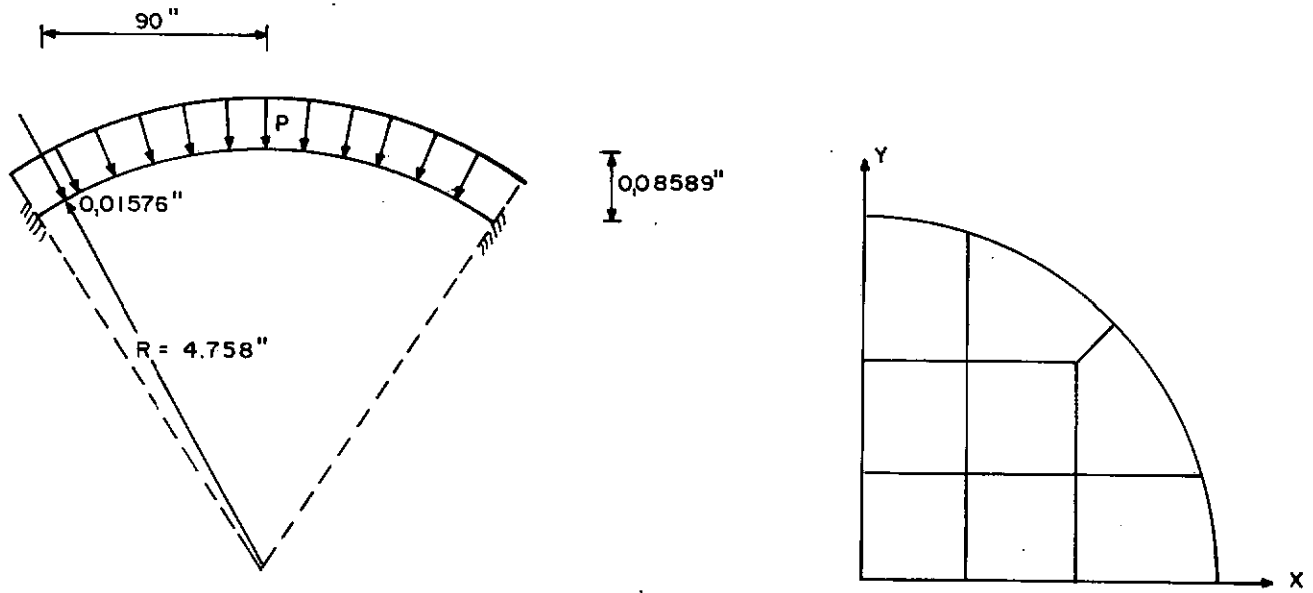


FIGURA 4.11 - Características geométricas.

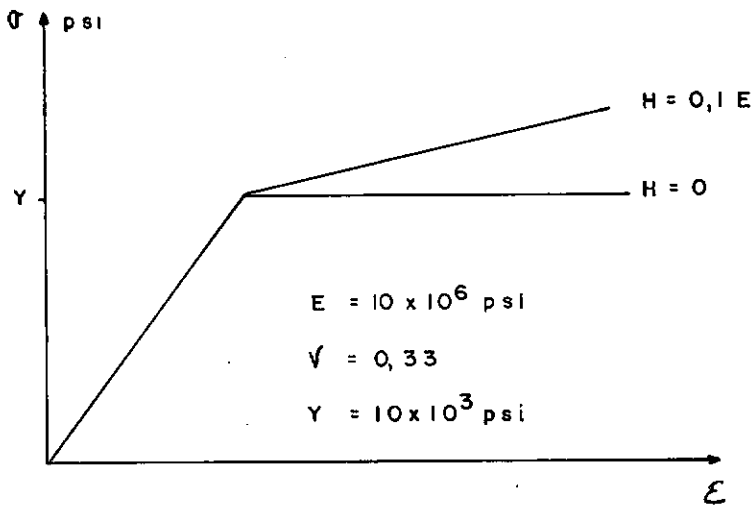


FIGURA 4.12 - Propriedades físicas, curvas tensão-deformação.

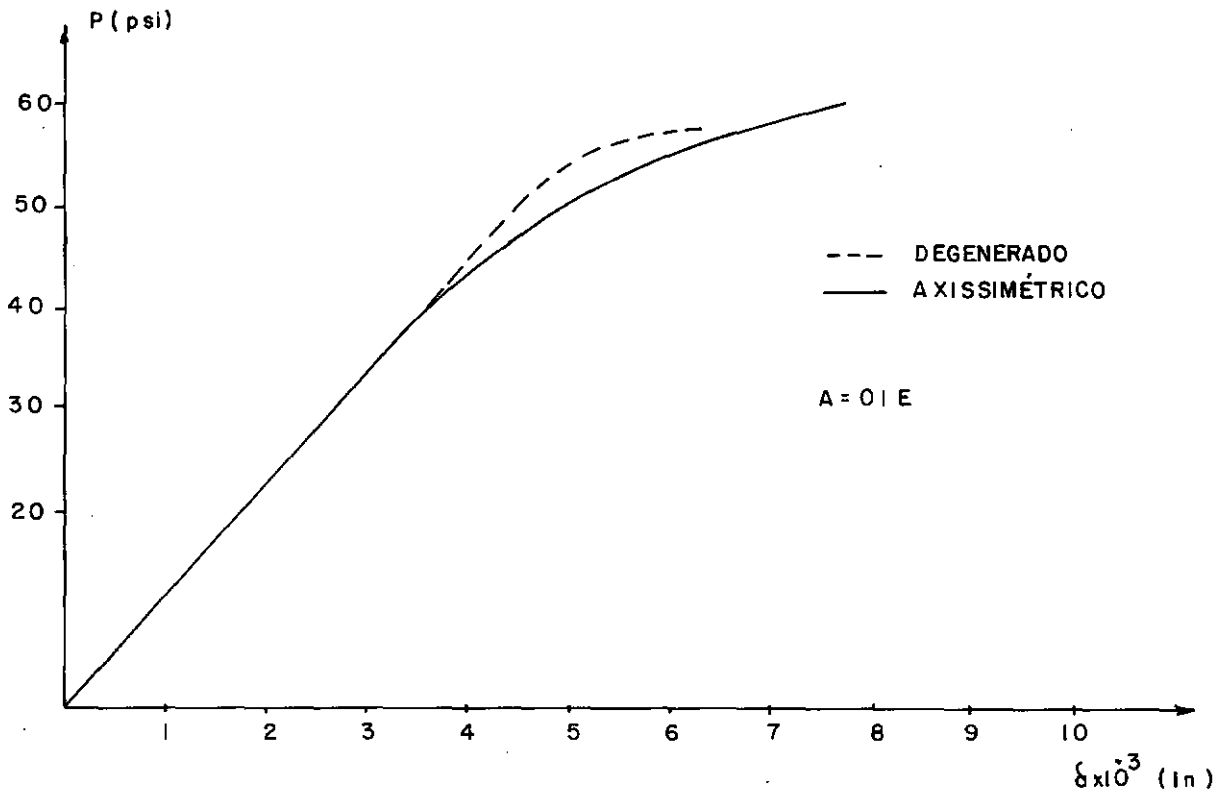
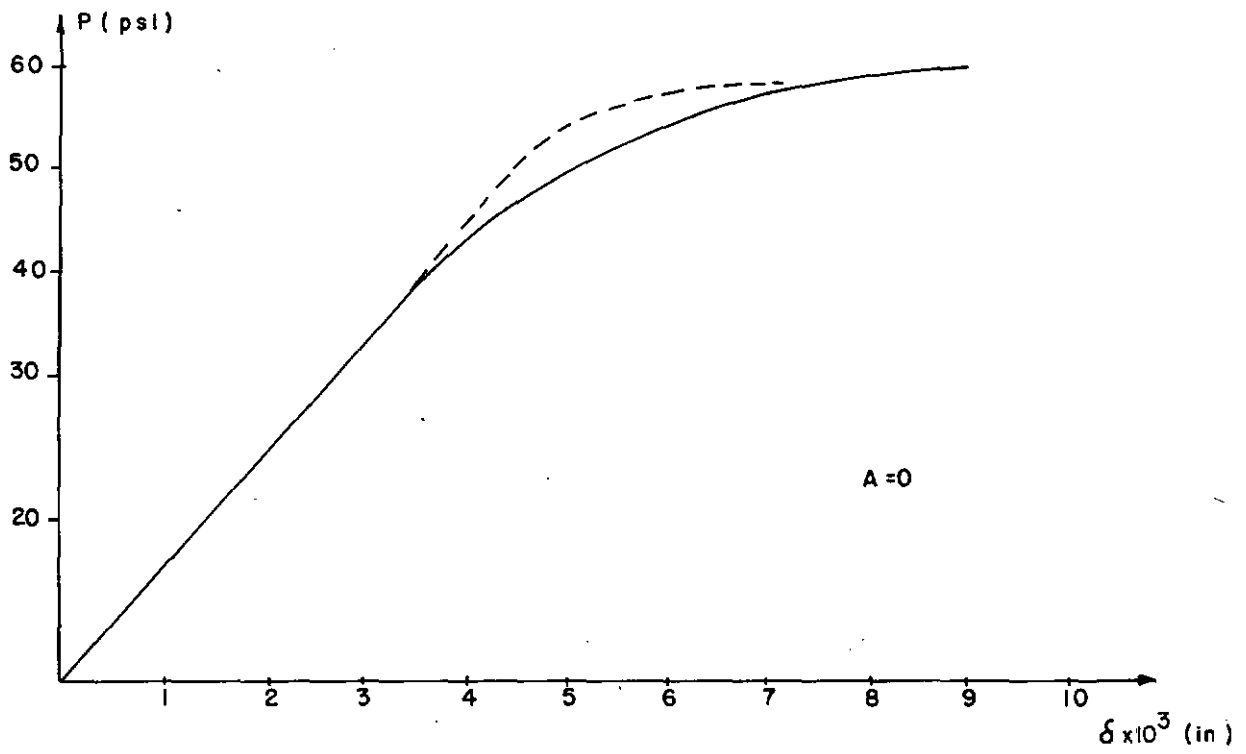


FIGURA 4.13 - Curvas de deflexões máximas.

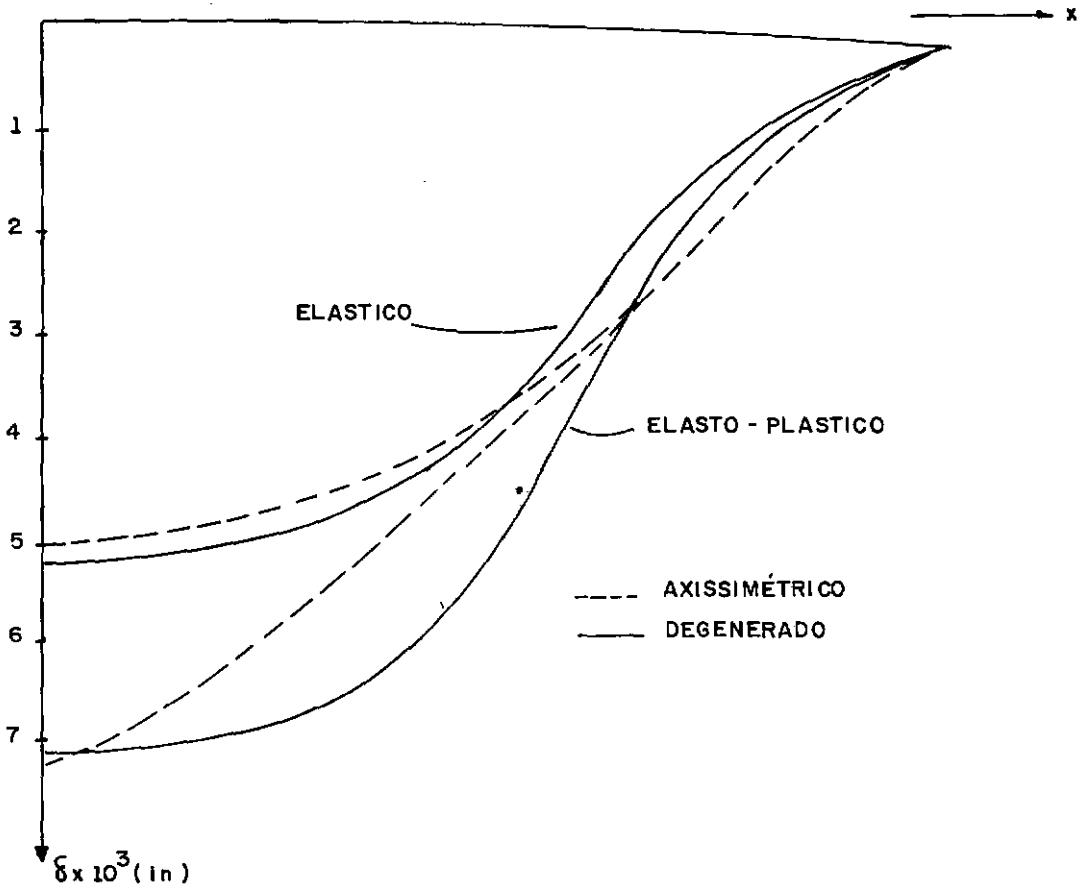


FIGURA 4.14 - Deflexões ao longo do raio para
 $p = 57,5$ psi

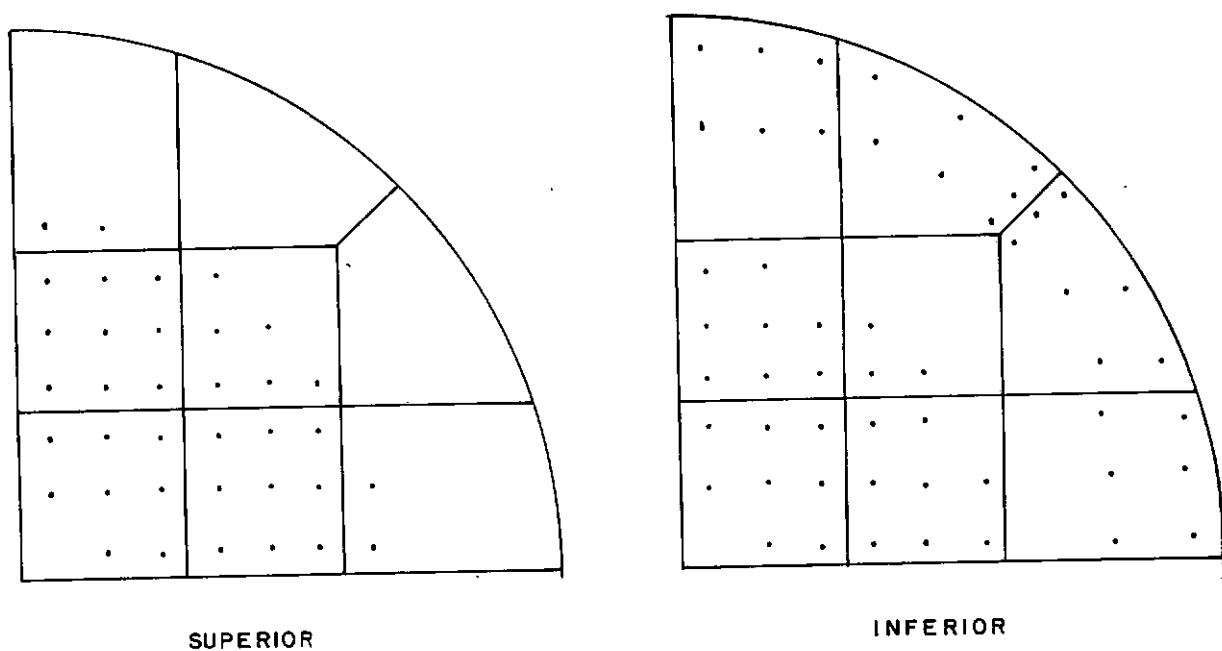


FIGURA 4.15 - Pontos de integração plastificados.

4.4 PLACA CIRCULAR

Procurando comparar alguns resultados práticos com os obtidos teoricamente, analisou-se o comportamento elasto-plástico de uma placa circular de alumínio 6061-T6 cujas características geométricas e do carregamento são descritas esquematicamente na Figura 4.16. O modelo estrutural aproximado, idealizado por Witmer (18) e utilizado nesta análise tem sua geometria representada na Figura 4.17a. Em sua análise Witmer fez uso de elementos finitos de casca de revolução sendo que o car

regamento foi aproximado por uma série de Fourier com nove harmônicos.

Por não se tratar de um carregamento axissimétrico o modelo foi analisado com uso de elementos finitos degenerados cuja discretização segue o da Figura 4.17b. As propriedades físicas características da liga estão definidas no diagrama tensão deformação da Figura 4.18. O critério de plasticidade considerado foi o de Huber-Mises e utilizando-se do método incremental para solução do sistema de equações o carregamento solicitante foi aplicado em incrementos de 1.000 lbs.

As deflexões centrais para todos os valores de carga analisados comparadas com os resultados experimentais e os obtidos por Witmer foram plotados na Figura 4.19. Uma comparação entre o comportamento elástico e o elasto-plástico, através dos diagramas de deflexões ao longo do raio para $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 90^\circ$ é ilustrada na Figura 4.20. O efeito da redistribuição de tensões devido a não-linearidade é caracterizado pelos diagramas de momentos M_x segundo $\theta = 0^\circ$ para a solução elástica e elasto-plástica, Figura 4.21. Finalmente a indicação dos pontos de integração plastificados para $P = 9.000$ lbs é feita através da Figura 4.22.

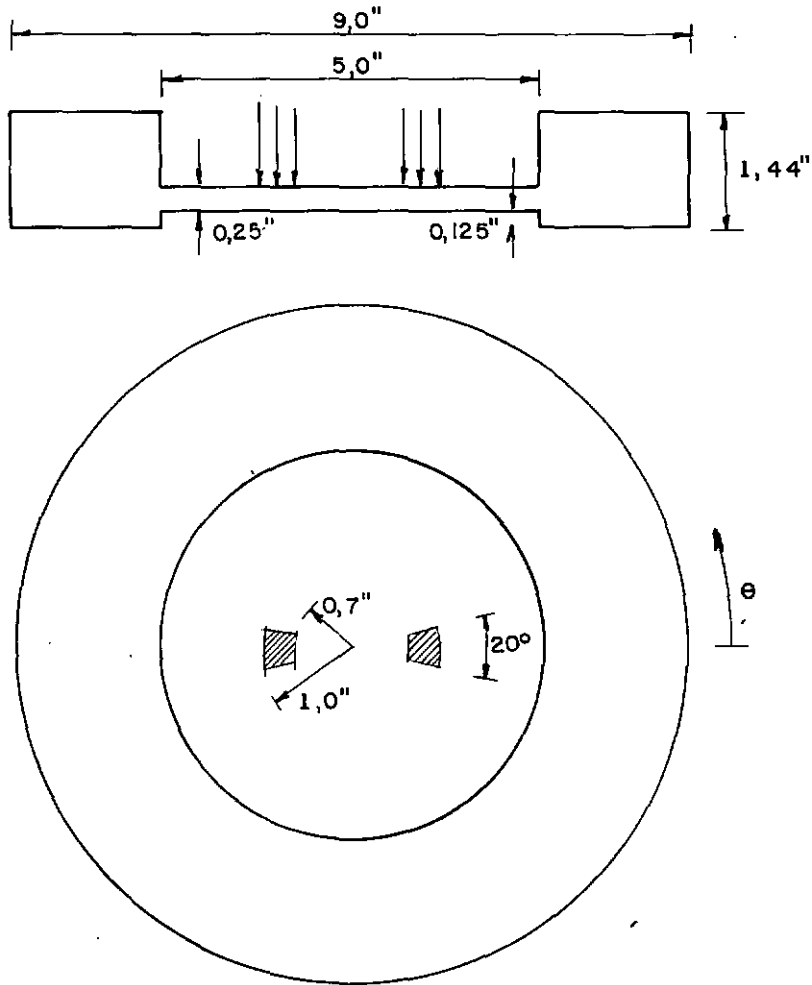


FIGURA 4.16 - Características geométricas do modelo analisado em laboratório.

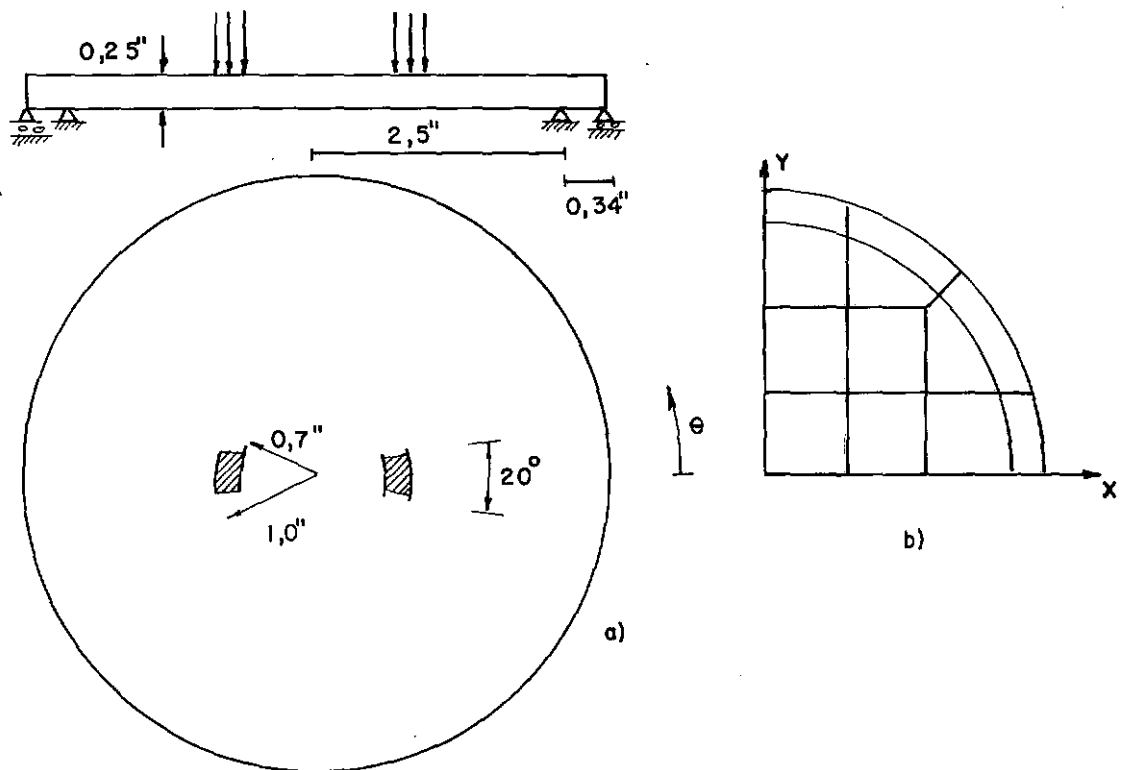


FIGURA 4.17 - Características geométricas do modelo aproximado e sua discretização.

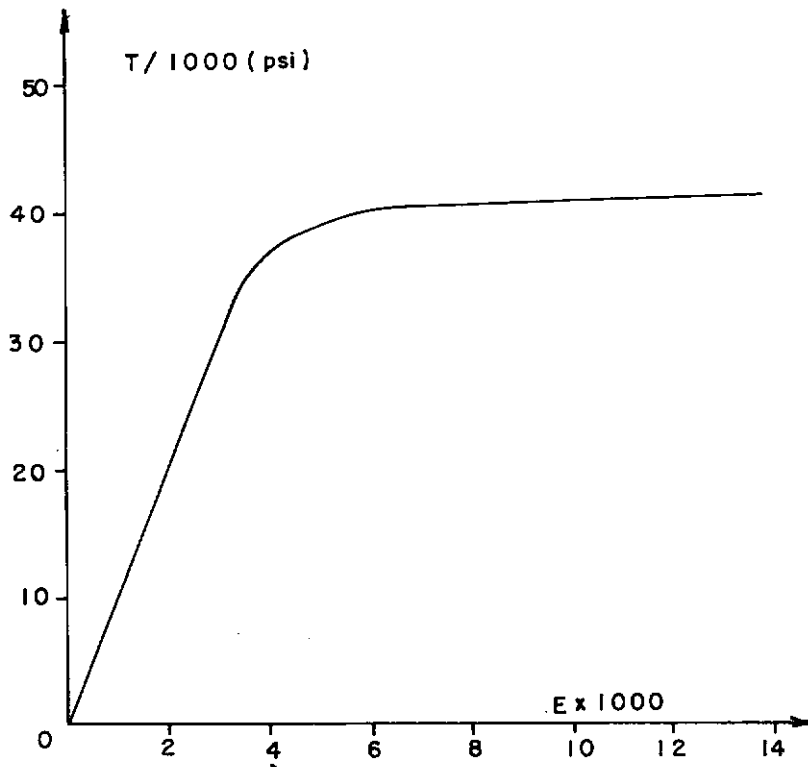


FIGURA 4.18 - Diagrama tensão-deformação do material.

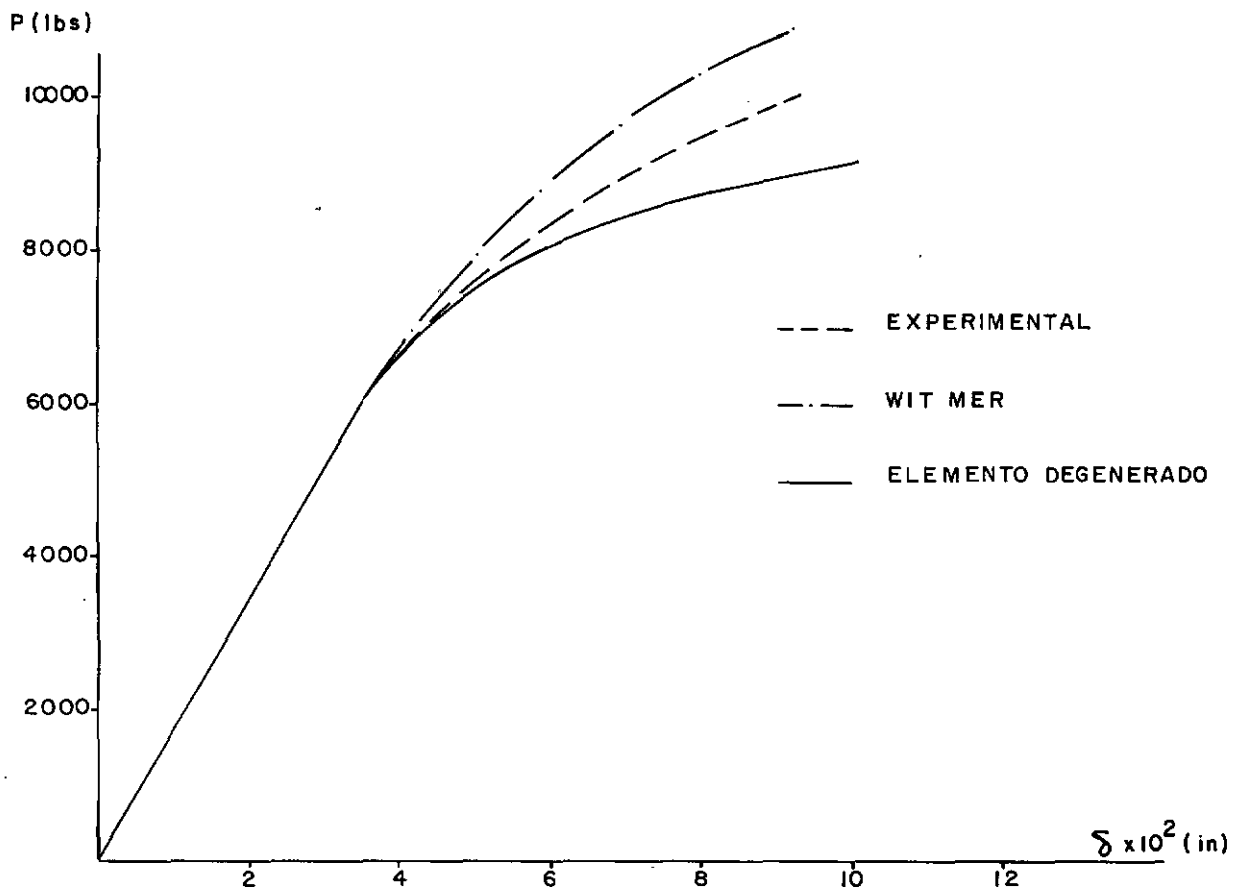


FIGURA 4.19 - Curva carga por deflexões centrais.

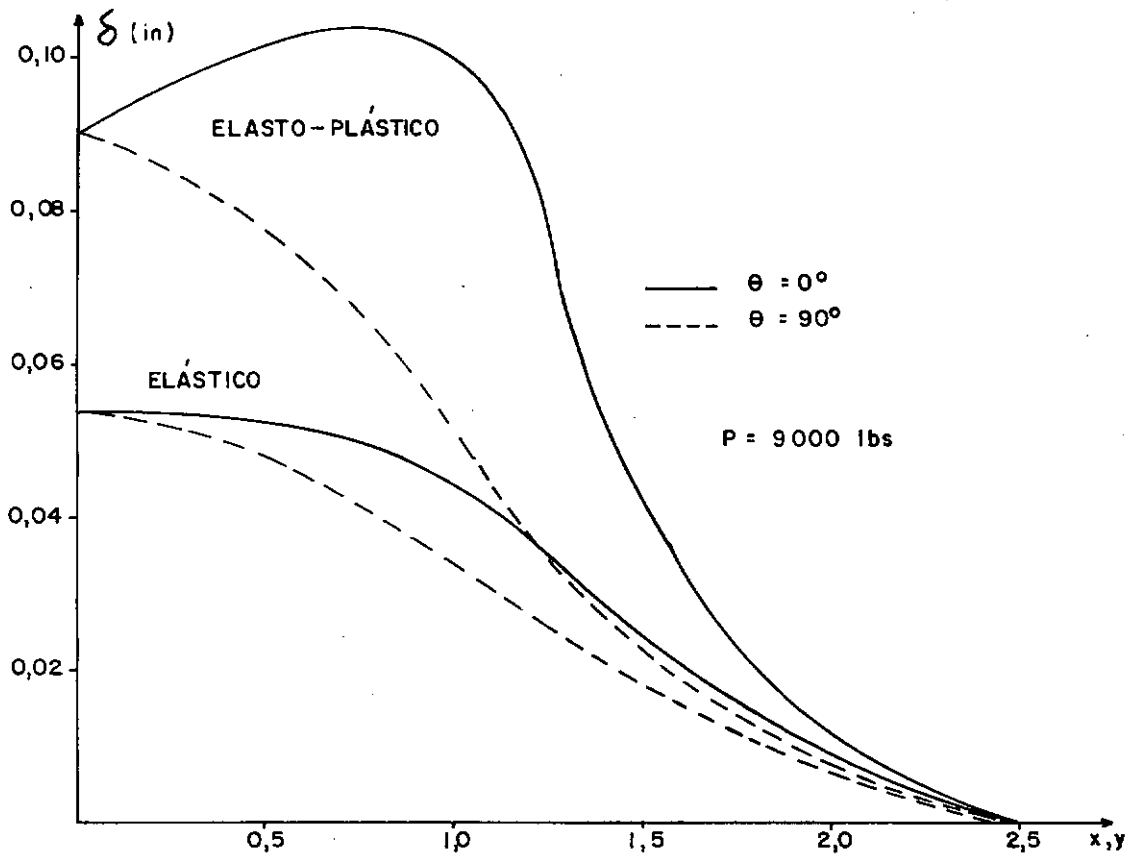


FIGURA 4.20 - Deflexões ao longo do raio.

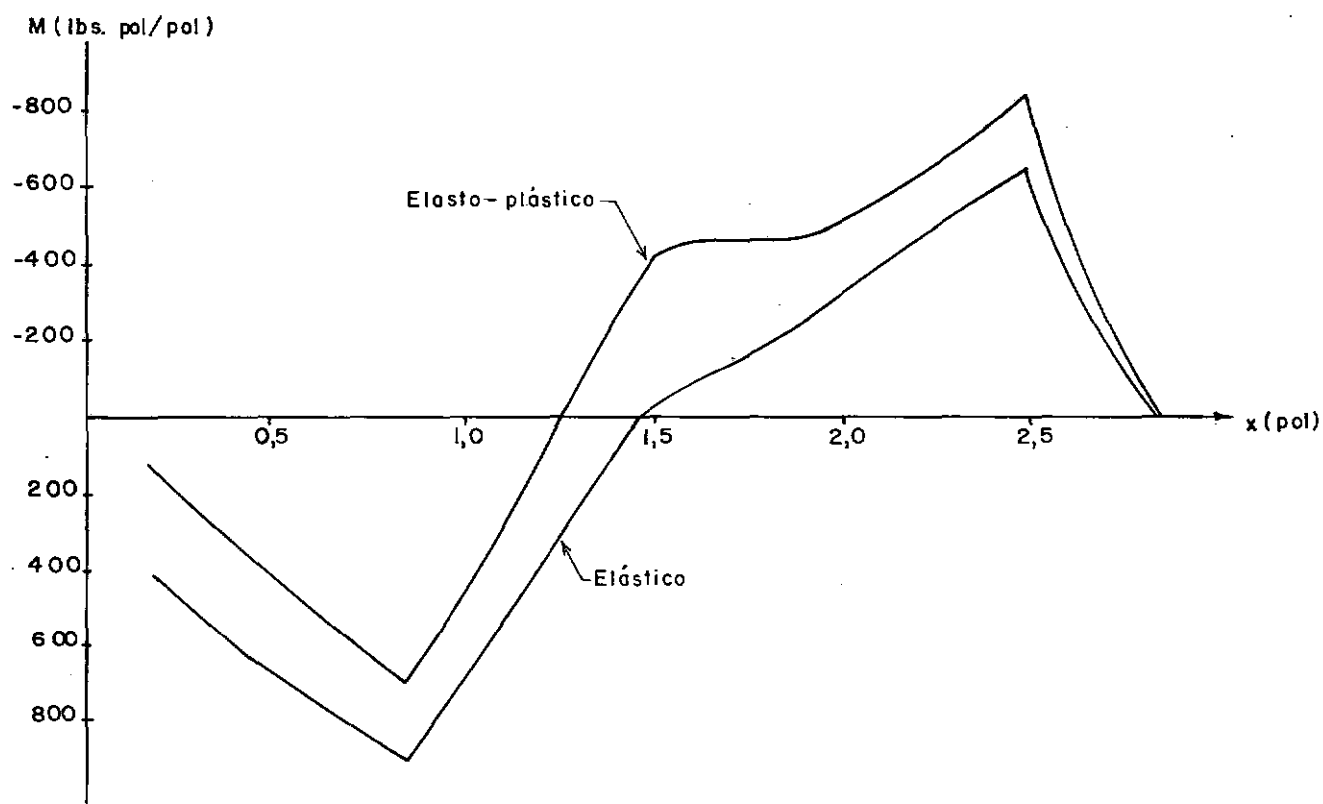


FIGURA 4.21 - Diagrama de momentos M_x segun $\theta = 0^\circ$

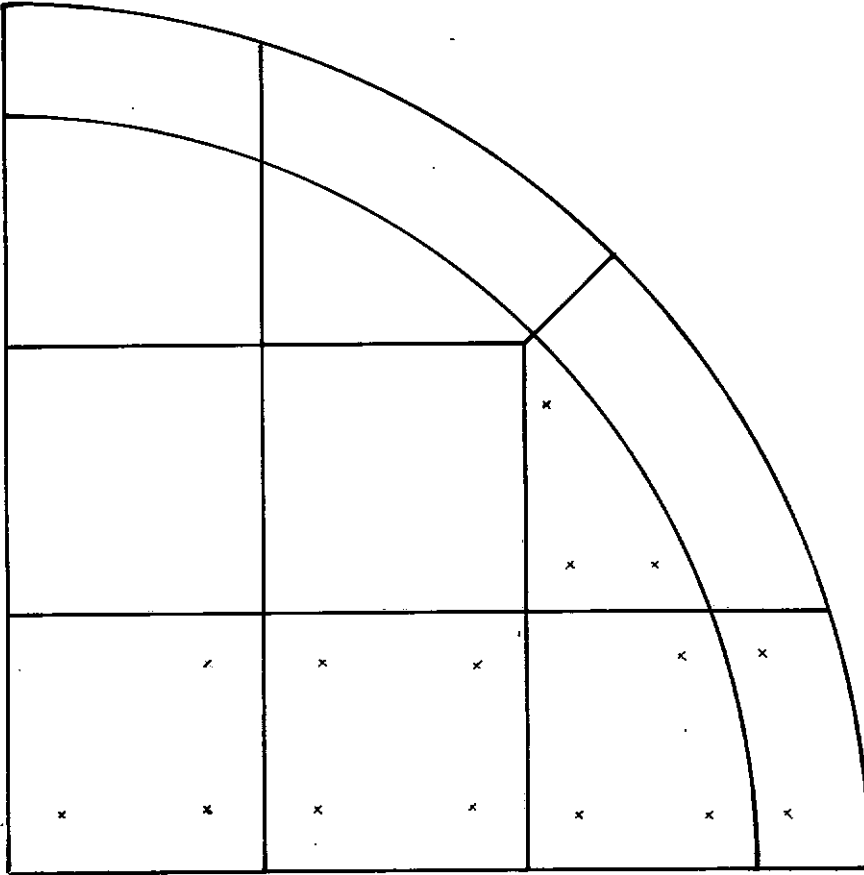


FIGURA 4.22 - Pontos de integração plastificados.

CONCLUSÕES

O uso de elementos finitos isoparamétricos é uma eficiente aproximação de problemas não-lineares. Utilizando-se dos tensores de deformações de Green ou Almansi para o estudo do contínuo, as propriedades dos elementos isoparamétricos são diretamente derivadas da teoria tridimensional, não sendo, portanto, a análise de grande deformações restrita a uma simples aproximação de segunda ordem. Além da facilidade de discretização de geometrias arbitrárias e da simplicidade de sua formulação, vale ressaltar a conveniência destes elementos na análise elasto-plástica. As propriedades que descrevem o comportamento de um elemento são obtidas do estado de tensão de cada ponto de integração individualmente, permitindo um conhecimento preciso de todo o domínio.

Para a resolução dos sistemas de equações não-lineares diversas alternativas ocorrem e a escolha do algoritmo de solução é feita em função do tipo de problema a ser analisado.

Na análise não-linear física o método incremental se mostrou bastante eficiente, sendo que para problemas de grandes deformações o melhor algoritmo é o de solução mista. Entretanto, qualquer que seja o método de resolução utilizado, em cada incremento e em todas as iterações as forças não-balanceadas devem ser computadas para evitar uma acumulação sucessiva de erros.

Embora não seja usual a hipótese de estrutura atingir o regime plástico, a necessidade de se implementar esquemas numéricos adequados ao comportamento não-linear existe. A avaliação de cargas de ruptura de condições realísticas fornece uma significativa e consistente estimativa de fatores de segurança. O conhecimento da redistribuição de tensões resultantes do comportamento não-linear é de extrema valia para o projeto de uma eficiente, segura e bem proporcionada estrutura.

A degeneração de elementos isoparamétricos tridimensional se mostrou eficiente para a análise elasto-plástica de estruturas de superfície, possibilitando que se estude cascas e placas, delgadas ou espessas, com geometria e solicitações quaisquer, não se limitando portanto a problemas de simetria axial. A solução da placa circular confrontada com os resultados experimentais é bastante significativa. Além disso, os resultados da análise da casca esférica indicaram boa concordância com o elemento isoparamétrico de sólido de revolução, apesar de se tratarem de duas aproximações distintas.

BIBLIOGRAFIA

1. MALVERN, L.E.: "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall Inc., 1969. .
2. ZIENKIEWICS, O.C.; NAYAK, G.C.: "General Approach to Problems of Large Deformation and Plasticity using Isoparametric Elements", Wright-Patterson Air Force Base, 1971.
3. BATHE, K.L.; WILSON, E.L.; IDING, R.H.: "NONSAP - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear Systems", Report UCSESM 74-3, Berkeley 1974.
4. ODEN, J.T.: "Finite Elements of Nonlinear Continua", McGraw-Hill, 1972.
5. ZIENKIEWICS, O.C.: "The Finite Elements Method in Engineering Science", McGraw-Hill, 1971.

6. NAYAK, G.C.; ZIENKIEWICS, O.C.: "Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 1972.
7. ISAACSON, E.: "Analysis of Numerical Methods", John Wiley & Sons Inc., 1966.
8. IRONS, B.M.; TUCK, R.C.: "A version of the Aitken Accelerator for Computer Iteration", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 1, 1969.
9. BERGAN, P.G.; CLOUGH, R.W.: "Convergence Criteria for Iterative Processes", AIAA Journal, Vol. 10, nº 8.
10. ZIENKIEWICS, O.C.; TAYLOR, R.L.; TOO, J.M.: "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, 1971.
11. HALBRITTER, A.L.: "Análisis de Cascaras Gruesas y Finas con Elementos Tridimensionales", Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1974.
12. FUNG, Y.C.: "Foundations of Solid Mechanics", Prentice-Hall, N.J., 1965.

13. ARMEN, H.; LEVINE, N.S.; PIFKO, A.B.: "Plasticity-Theory and Finite Element Applications", Nonlinear Analysis.
14. PRAGER, W.: "The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements", Proc. Instn. Medr., Engrs., Vol. 169, 1955.
15. DRUCKER, D.C.: "Plasticity, Structural Mechanics", Proceedings First Symposium on Naval Structural Mechanics, Pergamon Press, 1960.
16. ZIENKIEWICS, O.C., NAYAK, G.C.; OWEN, D.R.J.: "Composite and Overlay Models in Numerical Analysis of Elasto-Plastic Continua", International Symposium on Foundation of Plasticity, Warsaw, 1972.
17. HAISLER, W.E.; STRICKLIN, J.A.; STEBBINS, F.J.: "Development and Evaluation of Solution Procedures for Geometrically Nonlinear Structural Analysis by the Direct Stiffness Method", AIAA/ASME, Structures, Dynamics and Materials Conference - Anaheim, California, 1971.
18. WITMER, E.A.; KOTAUCHIK, J.J.: "Progress Report on Discrete Element Elastic and Elastic-Plastic Analyses of Shells of Revolution Subjected to Axisymmetric and Asymmetric Loading", M.I.T., 1968.
19. LORANE: "Uma Linguagem Orientada para Análise Estrutural", U.F.R.G.S., 1973.

20. HILL, R.: "The Mathematical Theory of Plasticity", Oxford 1950.
21. ODEN, J.T.: "Computation Methods in Nonlinear Mechanics", Ticon 1974.
22. BREBIA, C.A.; FERRANTE, A.J.: "The Finite Element Technique", U.F.R.G.S., 1975.
23. COOK, R.D.: "Concepts and Application of Finite Element Analysis", John Wiley, 1974.
24. YAMADA, Y.; YOSHIMURA, N.; SAKURAI, T.: "Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method", International Journal of Mechanics Sciences, Vol. 10, 1968.
25. POPOV, E.P.; KHOJASTEN-BAKHT, S.: "Analysis of Elastic-Plastic Circular Plates", ASCE, Vol. 93, EM6, 1967.
26. VENANCIO, F.: "Análise Matricial de Estruturas", Almeida Neves, 1975.
27. ODEN, J.T.: "Numerical Formulation of Nonlinear Continua", ASCE 93, ST3, 1967.
28. BREBBIA, C.; CONNOR, J.J.: "Fundamentals of Finite Element Technique", Butterworths, 1973.

29. LANDAU, L.; EBECKEN, N.F.F.: "Análise Não-Linear de Estruturas de Superfície por Meio de Elementos Finitos Tridimensionais Degenerados", Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Civil, Caracas, Venezuela, 1975.
30. LANDAU, L.; WROBEL, L.C.; EBECKEN, N.F.F.: "Análise Elasto-Plástica de Estruturas de Superfície", Colóquio Franco-Brasileiro sobre Métodos Numéricos em Engenharia, COPPE/UFRJ, 1976.

SIMBOLOGIA

ϵ_{ij}	tensor de deformações Lagrangeanas, tensor de Green.
$\bar{\epsilon}_{ij}$	tensor de deformações Eulerianas, tensor de Almansi.
$\bar{\sigma}_{ij}$	tensor de tensões de Cauchy.
σ_{ij}^*	1º tensor de tensões Piola-Kirchhoff.
σ_{ij}	2º tensor de tensões Piola-Kirchhoff.
u_i	deslocamentos em um ponto do elemento.
x_i	coordenadas materiais.
\bar{x}_i	coordenadas espaciais.
J_{ji}	matriz Jacobiana.
N	matriz das funções de interpolação.
δ	deslocamentos nodais.

B, \bar{B}	matriz que relacione as deformações específicas com os deslocamentos nodais, formulação Lagrangeana e Euleriana.
$\underline{R}, \bar{\underline{R}}$	forças equivalentes nodais.
$\underline{\psi}, \bar{\underline{\psi}}$	forças residuais.
K_T	matriz de rigidez tangente.
$\ \underline{\gamma}\ $	norma de deslocamentos.
$\underline{D}, \bar{\underline{D}}$	matriz das propriedades físicas do material.
$\underline{\sigma}_J$	tensor de deformações de Jaumann.
η, ζ, ξ	coordenadas naturais.
σ_{el}, Y	tensão de escoamento.